הרחבות ריבועיות

1. נתונים $p \neq 3$ ראשוני ו-n שלם כך ש-$p \mid n^3 - 3n + 1$. הוכיחו כי $p \equiv \pm 1 \pmod{9}$.

2. הסדרה $a_0, a_1, a_2, \ldots$ מוגדרת כך: $a_0 = 2$, $a_{k+1} = 2a_k^2 - 1$, עבור $k \geq 0$. הוכיחו כי אם ראשוני אי-זוגי p מחלק את a_n אז 2^{n+3} מחלק את $p^2 - 1$.

3. הסדרה $\{x_n\}$ מוגדרת על ידי $x_1 = 2$, $x_2 = 12$, ונוסחת נסיגה $x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n$, עבור כל n שלם חיובי. יהי p ראשוני אי-זוגי, ו-q מחלק ראשוני של x_p. הוכיחו כי אם $q \neq 2,3$ אז $q \geq 2p - 1$.

4. הוכיחו כי לכל $a > 1$ שלם, המחלקים הראשוניים של $5 \cdot a^4 - 5 \cdot a^2 + 1$ שקולים ל-± 1 מודולו 20.

5. מבחן לוקאס-למר: נתון שלם אי-זוגי k. נגדיר סדרה $\{s_n\}$ לפי $s_0 = 4$ וכלל הנסיגה $s_{n+1} = s_n^2 - 2$. נסמן $M_k = 2^k - 1$. הוכיחו כי M_k ראשוני אם ורק אם s_{k-2} מתחלק ב-M_k.

6. יהי n שלם חיובי. נגדיר את כל השלמים d כך שקיימים שלמים a,b,c עבורם $c + d \cdot i = (a + b \cdot i)^n$. מצאו את המחלק המשותף המרבי של כל המספרים d מסוג זה כפונקציה של n.