מודולו

1. נתון מספר ראשוני $p=2k+1$ ו- k מספרים שלמים נוספים $a_1,...,a_k$ שלא מתחלקים ב- p. הראו כי אם לא קיימים i,j שונים עבורם $a_i^2-a_j^2$ מתחלק ב- p, אז $a_1^2\cdot a_2^2\cdot ...\cdot a_k^2+(-1)^k$ מתחלק ב- p.

2. נתון מספר ראשוני $p=2k+1$. הראו שהמונה של השבר $1+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{k^2}$ מתחלק ב- p.

3. נתונות שתי רשימות של מספרים: האחת 1, 6, 11, ..., 96 והשנייה 4, 9, 14, ..., 99. בכל תור מוחקים שני מספרים מאחת הרשימות ורושמים את שליש הסכום שלהם (שאינו בהכרח שלם) ברשימה השנייה. ממשיכים בתהליך כל עוד אפשר.
א. הוכיחו שבסוף התהליך יישאר בדיוק מספר אחד בכל אחת מהרשימות.
ב. הוכיחו ששני המספרים האלה שונים.

4. א. כמה מבין מקדמי הפולינום $x(x+1)(x+2)\cdot...\cdot(x+9)$ מתחלקים ב-3?
ב. אותה שאלה עבור $x(x+1)(x+2)\cdot...\cdot(x+99)$.

5. הראו שקיימים אינסוף מספרים שלמים שלא ניתן להציגם בצורה $a^{13}+b^{13}+c^{13}+d^{13}$, כאשר a,b,c,d מספרים שלמים (אבל לאו דווקא חיוביים).

6. פתרו את המשוואה $4^n+4=3^m+5^k$ במספרים שלמים (יש למצוא את כל התשובות האפשריות).

7. הראו שלכל $p>3$ ראשוני קיים n עבורו $2^n+3^n+6^n-1$ מתחלק ב- p.

8. הוכיחו כי אם המספרים הטבעיים a,b,c,d,e,k,ℓ,m,n,s מקיימים

$$a^{k^8-k^4}+b^{\ell^8-\ell^4}+c^{m^8-m^4}+d^{n^8-n^4}=e^{s^8-s^4},$$

אזי בין המספרים a,b,c,d יש לפחות אחד שמתחלק ב-2255.

בתאבון!