

משוואות פונקציונליות ותורת המספרים

התרגיל מתמקד בשאלות בהן צריך להשתמש בתכונות של מספרים טבעיים, ואין כאן תרגילים על משוואות פונקציונליות שהטווח שלהן הינו \mathbb{N} או \mathbb{Z} אך פתרון אלגברי. זהו נושא אחר שעומד בפני עצמו ומכיל מבחר טריקים יחודיים שלא מופיעים לרוב במשוואות שהטווח שלהן הוא \mathbb{R} , וחלקם חופפים עם הטריקים בתרגיל זה. בסופו של דבר, במשוואה פונקציונלית חשוב לגשת עם כל המיומנויות- האלגברית, הדיסקרטית (ניתוח מסלולים, תמונה, אינדוקציה וכו'), וגם לפעמים ה"תורת מספרים".

למי שמעוניינים בשילוב בין התרגיל הזה לבין שאלות שהן יותר אלגבריות (עם אותו טווח), מומלץ להסתכל על התרגיל של דן על משוואות פונקציונליות בשלמים משנת תשע"ג (באתר)

טיפים:

- לבדוק מספרים קטנים, כמו 1 ו 2, שלעיתים מאוד קל למצוא את הערך של הפונקציה בהם מהתנאי הראשוני, או עם עוד קצת עבודה
 - להציב ראשוניים, חזקות ראשוניים ובאופן כללי מספרים בלי הרבה גורמים: זה מצמצם מאוד את האפשרויות לביטוי שמחלק!
 - לגרום לביטוי המחלק להיות ראשוני או לא מאוד פריק, ולביטוי המחולק להיות מכפלה
 - להשתמש בחסמים חזקים! לדוגמא, אם $a|b$ והם שונים, אזי $a \leq \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor$
 - בהמשך לטיפ הקודם, לחסום את $f(n)$ מלמעלה ומלמטה
 - להשתמש ברעיונות של אלגוריתם אוקלידס- אם ביטוי מחלק שני ביטויים, הוא מחלק גם צירופים לינאריים יותר נוחים שלהם
 - גישה אינדוקטיבית- להניח משהו על n ולהסיק ממנו על $n + 1$. בפרט להציב את $n, n + 1$ ביחד
 - להציב מספרים זרים, או לגרום לביטויים להיות זרים- גם שימושי מאוד בתנאי חלוקה
- בכל המשוואות להלן, הפונקציה הינה מהטבעיים לטבעיים, אלא אם צוין אחרת. אפס איננו מספר טבעי. שתיים הוא כן מספר ראשוני.

$$1. \quad m^2 + f(n) | mf(m) + n$$

Shortlist 2013 N1

$$2. \quad f | m | n \leftrightarrow f(m) | f(n) \text{ על הינה } f$$

(בנוס: מה המקור של השאלה הזו?)

$$3. \quad f(n!) = (f(n))!, m - n | f(m) - f(n)$$

USAMO 2012 P4

$$4. \quad \text{יהי } n \text{ טבעי ואי זוגי, מצאו את כל הפונקציות } f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \text{ כך שלכל } x, y \text{ שלמים } x^n - y^n | f(x) - f(y)$$

Shortlist 2011 N3

$$5. \quad n + f(m) | f(n) + nf(m)$$

BMO 2017 P3

$$6. \quad \gcd(f(1), f(2), f(3), \dots) = 1 \text{ ולכל } n \text{ גדול מספיק } a, b \text{ כלשהם:}$$

$$f(n) \neq 1, (f(a))^n | (f(a+b))^{a^{n-1}} - (f(b))^{a^{n-1}}$$

ELMO Shortlist 2014 N8

$$7. \quad f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_{\geq 2}, f(n+m) | f(n) + f(m) \text{ לא חסומה}$$

Shortlist 2018 N6 של הרחבה