קומבי תרגיל

1. (א) בטבלה $m\times n$ רשומים הסימנים '+' ו-'–' בכל תור אפשר להפוך את הסימנים בשורה או עמודה כלשהי. הראו שאם אי-אפשר להביא טבלה זו למצב שבו הכל '+' אז יש בה ריבוע 2×2 שגם אותו אי-אפשר להביא למצב שבו הכל '+'.

(ב) בטבלה בגודל $m\times n$ רשומים הסימנים '+' ו-'–' בכל תור אפשר להפוך את הסימנים בכל שורה ,עמודה או אלכסון (הפינות גם נחשבות לאלכסונים). הראו שאם אי-אפשר להביא טבלה זו למצב שבו הכל '+' אז יש בה ריבוע 4×4 שגם אותו אי-אפשר להביא למצב שבו הכל '+'.

2. חזי חותך ריבוע ל-$4\le n^2$ מלבנים באמצעות $2(n-1)$ ישרים, ש-$n-1$ מהם מקבילים לצלע אחת, ו-$n-1$ מקבילים לצלע השניה. שושי טוענת שהיא תוכל למצוא סדרה של m מלבנים מבין החלקים שהתקבלו כך שכל אחד מהם יהיה אפשר להכניס לקודם (אולי לאחר סיבוב). עבור איזה m מקסימאלי שושי תוכל לקיים את ההבטחה שלה (היא מכריזה על המספר m עוד לפני שחזי מתחיל לחלק את הריבוע)?

3. בכיתה לומדים N תלמידים, ולכולם יש בעיות קשב וריכוז. כל דקה המורה שלהם מתעצבנת וצועקת על שני ילדים שיתחלפו במקומות. במהלך שיעור כלשהו היא צעקה על כל זוג ילדים פעם אחת בדיוק. עבור סידור התחלתי כלשהו, בכמה סידורים שונים יכולים הילדים לשבת בסוף השיעור? (התשובה יכולה להיות תלויה ב-N).

4. בתחרות כדור-עף השתתפו 49 נבחרות, כל נבחרת שחקה פעם אחת בדיוק נגד כל נבחרת אחרת (בכדור-עף אין תיקו). מבין כל תת-קבוצה של 25 נבחרות קיימת נבחרת שיש לה לכל היותר 4 הפסדים במשחקים נגד 24 הנבחרות האחרות בתת-קבוצה זו. הראו כי קיימת נבחרת שהפסידה ב-4 משחקים לכל היותר בכל התחרות.

5. בגרף מרחק בין שני קודקודים שווה לכמות הכי קטנה של מקצועות במסלול שמחבר אותם. לכל קודקוד v נגדיר $S_k(v)$ שזה כמות הקודקודים במרחק בדיוק k מ-v. נתון גרף עבורו $S_3(v)\le 100$ לכל v.

א. עבור איזה n בהכרח $S_2(v)\le n$ לכל v?

ב. עבור איזה m בהכרח $S_4(v)\le m$ לכל v?

6. בכל משבצת של לוח משבצות ריבועי כתוב + או – . מותר לשנות את הסימנים שכתובים באלכסון הראשי. הוכיחו שאפשר להגיע למצב בו כל השורות שונות זו מזו וכל העמודות שונות זו מזו.

7. למרדכי יש ממתקים מ-n סוגים שונים, k ממתקים מכל סוג. הוא חילק את הממתקים ל-k משלוחי-מנות המכילים n ממתקים כל אחד, וחילק את משלוחי-המנות ל-k ילדים. הילדים החליטו לחלק את הממתקים מחדש בצורה הוגנת. שני ילדים יסכימו להחליף ממתק בממתק אם כל אחד יקבל ממתק שאין לו. האם תמיד ניתן לארגן סדרת החלפות כך שבסופן לכל ילד יהיו ממתקים מכל הסוגים?

8. נתון מצולע קמור עם 2000 צלעות בו אף שלושה אלכסונים לא נפגשים בנקודה אחת. כל אלכסון צבוע באחד מבין 999 צבעים. הראו שבציור כל האלכסונים נוצר משולש שכל צלעותיו באותו הצבע.

9. נתונים מספר טבעי n ומספרים שלמים $a_1,a_2,...,a_n$. פונקציה $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ מקיימת לכל שני מספרים שלמים k ו-$0\neq\ell$ מתקיים השוויון $\sum_{i=1}^{n} f\left(k+a_i\cdot\ell\right)=0$. הראו כי $f\equiv 0$.

בתאבון!