



חלוקת עוגות

השאלה השאלתית. נתונות m עוגות, משקל כל עוגה 1 ק"ג. רוצים לחלק את העוגות בין n אנשים. לא רוצים שיהיו חלקים קטנים בחלוקה; כלומר רוצים שהחתיכה הכי קטנה שתיווצר תהיה גדולה ככל האפשר.

גודל החתיכה הקטנה יסומן $f(m,n)$.

לדוגמה $f(2,3) = \frac{1}{3}$; ודאו שזה ברור לכם.

1. נסו לבדוק מקרים קטנים קלים (האמנם?), כמו:

א. $f(3,4)$

ב. $f(5,7)$

ג. $f(4,7)$

ד. $f(4,25)$

ה. $f(7,9)$

ו. $f(8,9)$

ז. $f(11,14)$

ח. $f(14,17)$

ט. $f(23,29)$

י. $f(31,52)$

יש לראות את שאלה 1 כרשימת מתרות. נחזור לשאלה זו בהמשך התרגיל.

2. בהינתן $f(m,n)$, מצאו את $f(n,m)$.

מרגע זה נניח תמיד כי $m < n$.

3. הוכיחו כי אם $m \nmid n$ אז $f(m,n) \leq \frac{m}{2n}$.

מעכשיו נניח גם ש- $n \nmid m$ כיוון שאחרת הכל ברור.



4. א. הוכיחו כי אם $1 < \frac{m}{n} < \frac{3}{4}$ אז $f(m,n) \leq \frac{m}{n} - \frac{1}{2}$.

ב. הוכיחו כי אם $1 < \frac{m}{n} < \frac{2}{k+1}$ אז לכל $k > 2$ מתקיים $f(m,n) \leq \frac{m}{n} - \frac{1}{k}$.

5. א. הוכיחו כי $f(m, n) \geq \frac{m}{3n}$.



ב. הוכיחו כי עבור $\frac{2}{3} < \frac{m}{n} \leq \frac{3}{4}$ בסעיף א' מושג שוויון.

נסו להבין מתי מושג שוויון בסעיף א', ספרו לי אם אתם מצליחים.

6. יש m עוגות ו- $m < n$ אנשים, משקל כל עוגה 1 ק"ג. צריך לחתוך את העוגות ולחלק בין האנשים באופן שווה, כך שכל אחד יקבל לכל היותר 2 חתיכות וכל עוגה תחולק לכל היותר k חתיכות. עבור אילו m ו- n ניתן לעשות זאת?

7. א. הוכיחו כי אם $\frac{2}{3} > \frac{m}{n}$ אז $f(m, n) \leq \frac{1}{4}$.

ב. מתי מושג שוויון בסעיף הקודם?

ג. בהנחה ש- $\frac{2}{k} < \frac{m}{n} < \frac{2}{k+1}$ מצאו את כל הזוגות (m, n) עבורם $f(m, n) = \frac{1}{k+1}$.

8. א. אם $\frac{1}{2} < \frac{m}{n} \leq \frac{5}{9}$ אז $f(m, n) = \frac{m}{n} - \frac{1}{3}$.

ב. מתי מושג שוויון בסעיף הקודם?

ג. עבור $\frac{2}{k} < \frac{m}{n} < \frac{2}{k+1}$ ו- $k \geq 4$. מצאו את כל הזוגות (m, n) עבורם

$$f(m, n) = \frac{m}{n} - \frac{1}{k}$$

9. **עוגות ממשקלים שונים נתונים.** בכל אחד מהסעיפים שואלים, מה הגודל המקסימלי של החלק המינימלי.

- א. יש שתי עוגות ששוקלות 1 ו-2. צריך לחלק אותן באופן שווה בין N אנשים.
- ב. יש עוגות ששוקלות 59, 89 ועוד שתי עוגות ששוקלות 41. צריך לחתוך את העוגה הראשונה ל-4 חלקים את השנייה ל-6 ואת שתי האחרות ל-5 כל אחת, ולחלק בין 10 אנשים כך שכל אחד יקבל כמות זהה של חלקי עוגה ומשקל כללי זהה.
- ג. יש שתי עוגות ששוקלות 41, שלוש עוגות ששוקלות 35 ו-11 עוגות ששוקלות 29. צריך לחלק את כל אחת מהעוגות הראשונות ל-5 חלקים, את העוגות ששוקלות 35 צריך לחלק ל-4 חלקים כל אחת ואת שער העוגות לשני חלקים כל אחת. לאחר מכאן צריך לחלק את החלקים ל-22 אנשים כך שכל אחד יקבל כמות זהה של חלקי עוגה ומשקל כללי זהה.

10. א. מצאו את $f(m, n)$ כאשר $\frac{7}{12} < \frac{m}{n} < \frac{22}{33}$.

ב. עבור אילו ערכים נוספים של $\frac{m}{n}$ מתקבלת אותה תשובה?

11. פתרו את סעיפים ט, י בשאלה 1.

אם התלהבתם אתם מוזמנים לקחת עוגות קונדיטוריה ולנסות את זה שוב: (117,133), (27,61), (566,643), (3130,6831).

