

## תרגיל - Vieta - המשך

1. שורשי הפולינום  $x^3 + x^2 - 2x - 1$  הם  $\alpha, \beta, \gamma$ . רשמו פולינום ששורשיו הם  $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ .

2. נתון פולינום  $p(x, y) = x^2 + ax + b$  שהשורשים שלו הם  $x_1, x_2$  ופולינום נוסף

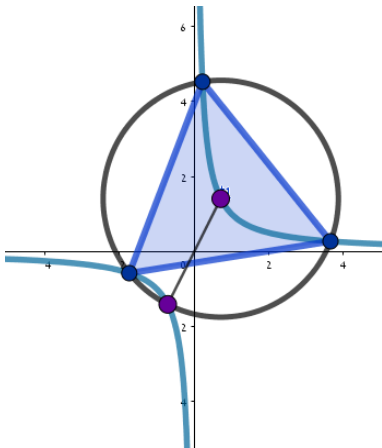
$q(x) = x^3 + mx^2 + nx + k$  שהשורשים שלו הם  $y_1, y_2, y_3$ .

מה יותר גדול:  $q(x_1) \cdot q(x_2)$  או  $p(y_1) \cdot p(y_2) \cdot p(y_3)$ ?

3. הראו כי  $\prod_{k=1}^n \left( 1 + a^2 - 2a \cos \left( \varphi + \frac{2\pi k}{n} \right) \right) = 1 + a^{2n} - 2a^n \cdot \cos(n \cdot \varphi)$

4. הראו שההעתקה  $x \mapsto x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}$  שומרת אורך של קבוצה.

במובן שלכל קטע I ב- $\mathbb{R}$  מתקיים: אורך של I שווה לאורך של  $f^{-1}(I)$ .



5. מצאו את האורך של קבוצת כל ערכי  $x \in \mathbb{R}$ , עבורם

$$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3} + \dots + \frac{70}{x-70} \geq \frac{5}{4}$$

שאלה זו הופיע באולימפיאדה הבינלאומית ישנה. באיזו שנה?

6. על ההיפרבולה  $xy = 1$  לוקחים שתי נקודות P ו-Q כך שאמצע

הקטע PQ הוא ראשית הצירים. מעגל שמרכזו Q חותך את ההיפרבולה

ב-4 נקודות: P, A, B, ו-C. הראו שהמשולש ABC משוכלל.

7. נתונה שניונית (אליפסה, פרבולה או היפרבולה) בצבע כחול.

א. הראו את משפט אפולוניוס: האמצעים של כל המיתרים שמקבילים לקו מסוים נמצאים על ישר אחד.

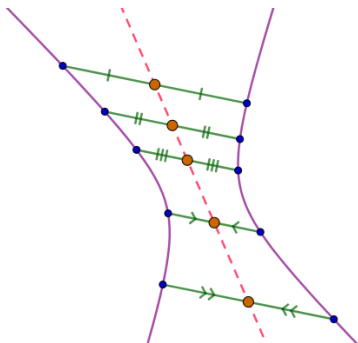
ב. נניח ש-O לא נמצאת על השניונית. על כל ישר שעובר דרך O וחותך את השניונית בשתי נקודות

שונות, כאשר מתייחסים לישר זה כציר מספרים עם הראשית בנקודה

O, נסמן בצבע כתום את הממוצע ההרמוני של שתי הנקודות הכחולות

בישר זה. הראו שכל הממוצעים האלה על ישר אחד.

ג. הכלילו את שני הסעיפים הקודמים לעקום מכל מעלה.



בתאבון!