

תרגיל Vieta

1. לפתור מערכות משוואות:

$$\left\{ \begin{array}{l} a+b+c=3 \\ a^2+b^2+c^2=15 \\ a^3+b^3+c^3=51 \end{array} \right. \text{ ג.} \quad \left\{ \begin{array}{l} a+b+c=1 \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1 \end{array} \right. \text{ ב.} \quad \left\{ \begin{array}{l} a+b+c=6 \\ a \cdot b \cdot c=6 \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{11}{6} \end{array} \right. \text{ א.}$$

2. נתונים מספרים a, b, c המקיימים $a+b+c=0$.

חשבו את $\frac{(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3)}{a^5+b^5+c^5}$ (בהנחה שהביטוי מוגדר).

3. מספרים שלמים (שונים מ-0) a, b, c כך ש- $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ וגם $\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$ שלמים. הראו כי $|a|=|b|=|c|$.

4. מספרים שלמים a, b, c, d מקיימים: $a+b+c+d$ מתחלק ב-17 וגם $a^3+b^3+c^3+d^3$ מתחלק ב-17. הראו כי $a^{27}+b^{27}+c^{27}+d^{27}$ מתחלק ב-17.

5. שורשי המשוואה $x^3 - 16x^2 - 57x + 1 = 0$ הם a, b, c .

א. הוכיחו כי a, b, c ממשיים.

ב. הוכיחו כי $\sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{b} + \sqrt[5]{c} = 1$.

6. חשבו את $\tan^2(1^\circ) + \tan^2(3^\circ) + \tan^2(5^\circ) + \tan^2(7^\circ) + \dots + \tan^2(89^\circ)$.

7. הראו כי $\prod_{k=1}^n \left(1 + a^2 - 2a \cos \left(\varphi + \frac{2\pi k}{n} \right) \right) = 1 + a^{2n} - 2a^n \cdot \cos(n \cdot \varphi)$

8. פרבולות $y = x^2 - a$ ו- $x = y^2 - b$ נחתכות ב-4 נקודות. מצאו את מרכז המסה של 4 הנקודות.

9. על ההיפרבולה $xy = 1$ לוקחים שתי נקודות P ו-Q כך שאמצע הקטע PQ הוא ראשית הצירים.

מעגל שמרכזו Q חותך את ההיפרבולה ב-4 נקודות: P, A, B, ו-C. הראו שהמשולש ABC משוכלל.

10. נתונה שניונית (אליפסה, פרבולה או היפרבולה) בצבע כחול.

א. הראו את משפט אפולוניוס: האמצעים של כל המיתרים שמקבילים לקו מסוים נמצאים על ישר אחד.

ב. נניח ש-O לא נמצאת על השניונית. על כל ישר שעובר דרך O וחותך את השניונית בשתי נקודות

שונות, כאשר מתייחסים לישר זה כציר מספרים עם הראשית בנקודה O, נסמן בצבע כתום את הממוצע

ההרמוני של שתי הנקודות הכחולות בישר זה. הראו שכל הממוצעים האלה על ישר אחד.

ג. הכלילו את שני הסעיפים הקודמים לעקום מכל מעלה.

בתאבון!