צ'בה מנלאוס

1. הוכיחו צ'בה זוויתי: על הצלעות BC, AC, AB של המשולש ABC נבחרו נקודות D, E, F בהתאמה. הוכיחו כי AD, BE, CF נפגשים בנקודה אם ורק אם

$$\frac{\sin\sphericalangle BAD}{\sin\sphericalangle DAC}\cdot\frac{\sin\sphericalangle ACF}{\sin\sphericalangle FCB}\cdot\frac{\sin\sphericalangle CBE}{\sin\sphericalangle EBA}=1$$

כאשר הזוויות הן זוויות מכוונות.

פתרון: ממשפט צ'בה אנחנו יודעים ש-AD, BE, CF נפגשים בנקודה אם ואק אם

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$$

אנחנו נוכיח שנאי זה שקול לתנאי על הסינוסים.

לשם כך נצטרך להשתמש בהכללה של משפט חוצה זווית, ההכללה אומרת כי עבור כל נקודה P על הצלע BC מתקיים:

$$\frac{BP}{CP}=\frac{AB\cdot\sin\sphericalangle BAP}{AC\cdot\sin\sphericalangle PAC}$$

קל לראות שזה נכון מכיוון ש-

$$\frac{BP}{CP}=\frac{S_{ABP}}{S_{ACP}}$$

ו- $S_{ABP}=AB\cdot AP\cdot\sin\sphericalangle BAP$, $S_{ACP}=AC\cdot AP\cdot\sin\sphericalangle CAP$

AP מצטמצם ומקבלים את ההכלה של משפט חוצה זווית.

עכשיו נשתמש בהכללה עבור הנקודות D, E, F על הצלעות ונקבל ש-

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{CA\cdot\sin\sphericalangle ACF}{BC\cdot\sin\sphericalangle FCB}\cdot\frac{AB\cdot\sin\sphericalangle BAD}{AC\cdot\sin\sphericalangle DAC}\cdot\frac{CB\cdot\sin\sphericalangle CBE}{BA\cdot\sin\sphericalangle EBA}$$
$$=\frac{\sin\sphericalangle BAD}{\sin\sphericalangle DAC}\cdot\frac{\sin\sphericalangle ACF}{\sin\sphericalangle FCB}\cdot\frac{\sin\sphericalangle CBE}{\sin\sphericalangle EBA}$$

הערה: שימו לב שבניסוח הזה D, E, F לא חייבות להיות על הצלעות.

2. על הצלעות AB, AC, BC של המשולש ABC נבחרו נקודות D, E, F בהתאמה כך ש-D, E, F על ישר. הוכיחו כי

$$\frac{AB}{BF}\cdot\frac{FD}{ED}\cdot\frac{DB}{BC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$$

פתרון: משפט מנלאוס על משולש AEF והישר CBD אומר ש-

$$\frac{AB}{BF}\cdot\frac{FD}{DE}\cdot\frac{EC}{CA}=-1$$

משפט מנלאוס על משולש BDF והישר AEC אומר ש-

$$\frac{BA}{AF}\cdot\frac{FE}{ED}\cdot\frac{DC}{CB}=-1$$

משפט מנלאוס על משולש CDE והישר AFB אומר ש-

$$\frac{DB}{BC}\cdot\frac{CA}{AE}\cdot\frac{EF}{FD}=-1$$

משפט מנלאוס על משולש AEF והישר CBD אומר ש-

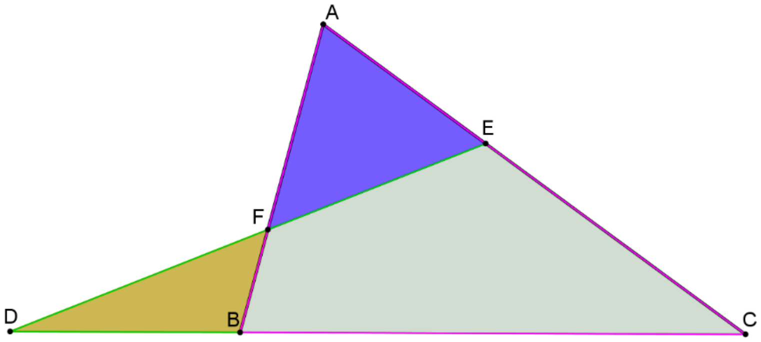
$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=-1$$

נכפיל את ארבעת המשוואות ונקבל ש-

$$\frac{AB}{BF}\cdot\frac{\cancel{FD}}{DE}\cdot\frac{EC}{\cancel{CA}}\cdot\frac{BA}{\cancel{AF}}\cdot\frac{FE}{ED}\cdot\frac{\cancel{DC}}{CB}\cdot\frac{DB}{BC}\cdot\frac{\cancel{CA}}{AE}\cdot\frac{EF}{\cancel{FD}}\cdot\frac{\cancel{AF}}{FB}\cdot\frac{BD}{\cancel{DC}}\cdot\frac{CE}{EA}=1$$

וקיבלנו ש-

$$\left(\frac{AB}{BF}\cdot\frac{FD}{ED}\cdot\frac{DB}{BC}\cdot\frac{CE}{EA}\right)^2=1$$



3. נתון משולש ABC, עקב הגובה מ-A יסומן D ועקב חוצה הזווית $\measuredangle A$ יסומן E. המעגל החוסם של ADE חותך את הצלעות AB, AC בנקודות P, Q בהתאמה. הוכיחו כי CP, BQ, AD נחתכים בנקודה.

פתרון: אנחנו רוצים להוכיח ש-

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$$

מדרגת הנקודה של B ביחס למעגל אנו יודעים ש- $BP \cdot BA = BD \cdot BE$

או במילים אחרות ש- $BP = \frac{BD \cdot BE}{BA}$

בנוסף מהדרגה של C ביחס למעגל אנו יודעים ש- $CQ \cdot CA = CE \cdot CD$

או במילים אחרות ש- $CQ = \frac{CE \cdot CD}{CA}$

נציב את BP ו-CQ ב-

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CQ}{QA}$$

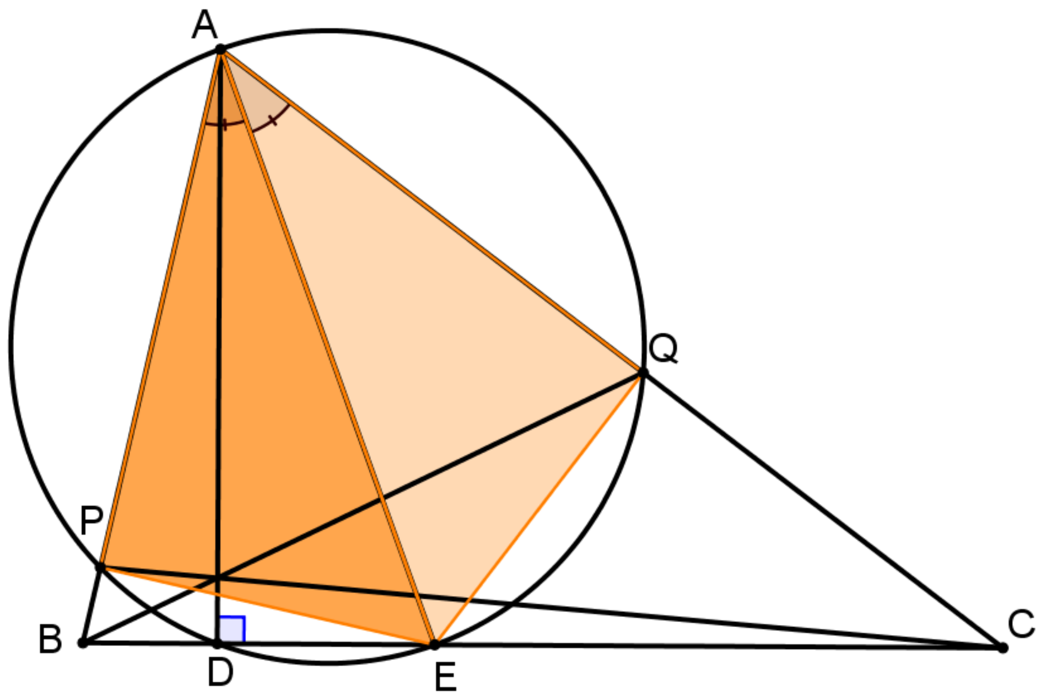
ונקבל ש-

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CQ}{QA} = \frac{AP}{\frac{\cancel{BD} \cdot BE}{AB}} \cdot \frac{\cancel{BD}}{\cancel{DC}} \cdot \frac{\frac{CE \cdot \cancel{DC}}{CA}}{QA} = \frac{AP}{QA} \cdot \frac{CE}{BE} \cdot \frac{AB}{CA}$$

עכשיו נזכר ש-AE חוצה זווית ולכן $\frac{CE}{BE} = \frac{CA}{AB}$ ולכן בעצם קיבלנו ש-

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CQ}{QA} = \frac{AP}{QA}$$

כלומר כל מה שצריך להוכיח זה ש- $AP = QA$.



זה נובע מכך שהמשולשים APE ו-AQF חופפים, זאת מפני שיש להם צלע משותפת, הזוויות ב-A שוות כי AE חוצה זווית והזוויות $\sphericalangle APE$ ו-$\sphericalangle AQE$ ישרות, מכיוון שהן זוויות היקפיות במעגל הנשענות על AE שהוא הקוטר כי הזווית $\sphericalangle ADE$ נשענת עליו והיא ישרה מההגדרה.

4. בתוך משולש ABC נבחרה נקודה X. החיתוכים של AX, BX, CX עם AB, AC, BC יסומנו D, E, F בהתאמה. החיתוכים של DE, DF עם ישר העובר ב-A ומקביל ל-BC יסומנו P, Q. הוכיחו כי A היא אמצע PQ.

פתרון: צ'בה אומר לנו ש-

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

בנוסף נשים לב שהמשולשים BDF ו-APF דומים ולכן

$$\frac{AF}{BF} = \frac{AP}{BD}$$

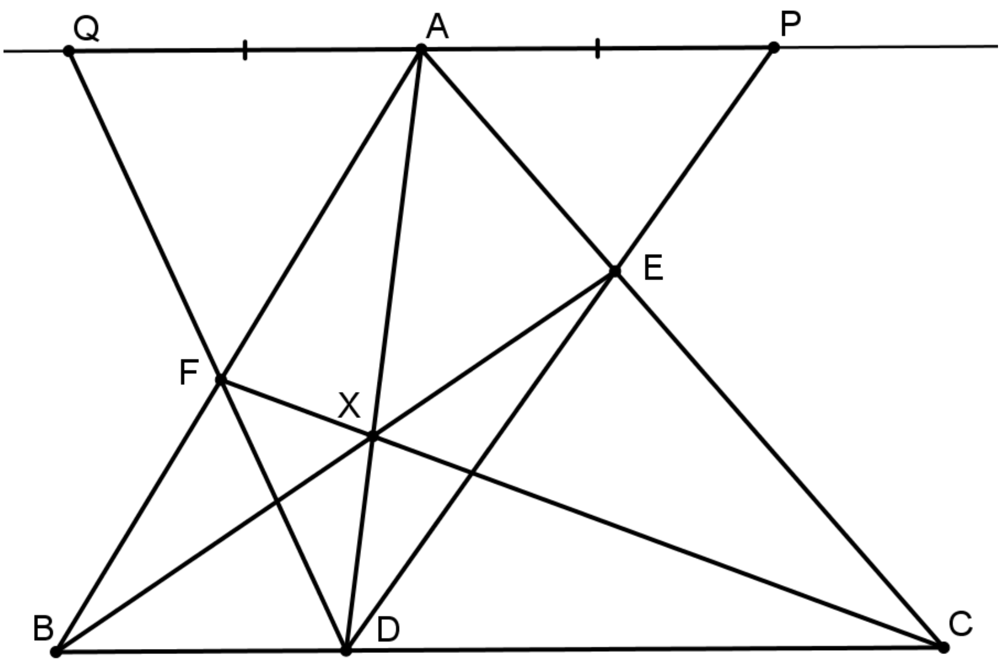
ומדמיון של AQE עם CDE נקבל ש-

$$\frac{AE}{CE} = \frac{AQ}{CD}$$

נציב את שתי המשוואות שמתקבלות מדמיון במשוואת צ'בה ונקבל:

$$1 = \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{AP}{DB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CD}{QA} = \frac{AP}{QA}$$

ולכן $AP = QA$ וזה מה שרצינו.



5. נתון משולש ABC, על צלעות המשולש כלפי חוץ נבנו שלושה משולשים ABF, BCD, ACE כך ש- $\measuredangle CBD = ABF, \measuredangle BAF = \measuredangle CAE$ ו-$\measuredangle ACE = \measuredangle BCD$. הוכיחו כי AD, BE, CF נחתכים בנקודה.

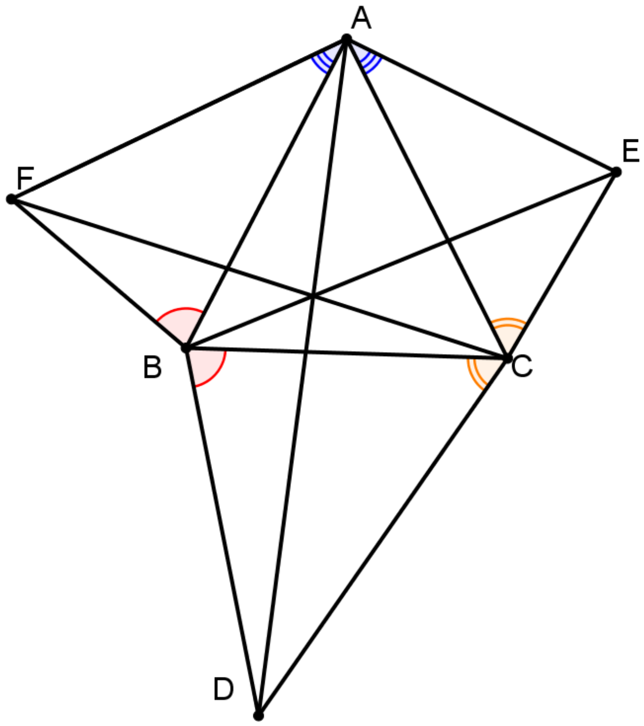
פתרון: ניסוח שבברור שקול לצ'בה זוויתי הוא ש-

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} \cdot \frac{S_{ACF}}{S_{CFB}} \cdot \frac{S_{BCE}}{S_{ABE}} = 1$$

וזה מה שנרצה להוכיח.

נסמן את הזוויות $\sphericalangle BAC, \sphericalangle CBA, \sphericalangle ACB$ ב- α, β, γ בהתאמה, ואתה הזוויות $\sphericalangle BAF, \sphericalangle ABF, \sphericalangle ACE$ ב- δ, ϵ, θ בהתאמה.

נשים לב ש-



$$\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{AB \cdot BD \cdot \sin\sphericalangle ABD}{AC \cdot CD \cdot \sin\sphericalangle ACD} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin\theta}{\sin\epsilon} \cdot \frac{\sin(\beta+\epsilon)}{\sin(\gamma+\theta)}$$

באופן דומה נקבל ש-

$$\frac{S_{ACF}}{S_{CFB}} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{\sin\epsilon}{\sin\delta} \cdot \frac{\sin(\alpha+\delta)}{\sin(\beta+\epsilon)}$$

ו-

$$\frac{S_{BCE}}{S_{ABE}} = \frac{BC}{AB} \cdot \frac{\sin\delta}{\sin\theta} \cdot \frac{\sin(\gamma+\epsilon)}{\sin(\alpha+\delta)}$$

נכפיל את שלושת הביטויים, הכל יצטמצם ונקבל 1, כמו שרצינו.

6. נתון משולש ABC, H הוא מפגש הגבהים של המשולש ו-O היא מרכז המעגל החוסם של המשולש. הוכיחו כי ניתן למצוא נקודות D, E, F על BC, AC, AB בהתאמה, כך ש-$OD + HD = OE + HE = OF + HF$

והישרים AD, BE, CF נחתכים.

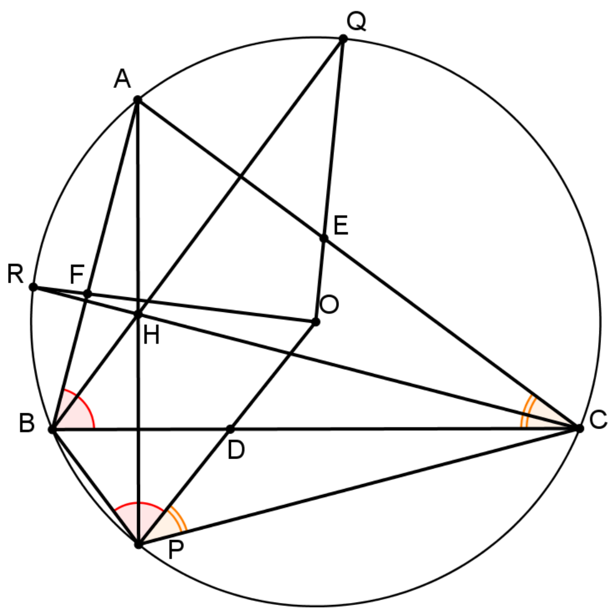
פתרון: נסמן את נקודות החיתוך של AH, BH, CH עם המעגל החוסם של ABC ב-P, Q, R בהתאמה. כידוע P ו-H סימטריות ביחס ל-BC ולכן $HD = PD$. לפיכך אנו רואים כי $OD + HD$ גדול או שווה מרדיוס המעגל החוסם של ABC. נבחר את D, E, F כך שהמינימום יתקבל, כלומר נגדיר אותן להיות החיתוכים של OP, OQ, OR עם BC, AC, AB בהתאמה, התנאי $OD + HD = OE + HE = OF + HF$ בברור מתקיים ועל כן נותר להוכיח ש-AD, BE, CF נחתכים.

לשם כך נרצה להבין את היחס $\frac{BD}{DC}$. על מנת זה נבין את הזוויות $\sphericalangle BPD$ ו-$\sphericalangle DPC$. נשים לב כי:

$$\sphericalangle DPC = \sphericalangle OPC = \sphericalangle OCP = 180^o - \sphericalangle POC = 180^o - 2\sphericalangle PAC = 180^o - 2(90^o - \sphericalangle ACB) = \sphericalangle ACB$$

ובנוסף $\sphericalangle APC = \sphericalangle ABC$ ולכן $\sphericalangle BPD = \sphericalangle APC = \sphericalangle ABC$.

לפיכך נקבל כי $\frac{BD}{DC} = \frac{\sin \sphericalangle ABC}{\sin \sphericalangle ACB}$ ובאופן דומה נקבל ש- $\frac{CE}{EA} = \frac{\sin \sphericalangle ACB}{\sin \sphericalangle CAB}$ ו-$\frac{AF}{FB} = \frac{\sin \sphericalangle BAC}{\sin \sphericalangle ABC}$ ולכן $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{\sin \sphericalangle ABC}{\sin \sphericalangle ACB} \cdot \frac{\sin \sphericalangle ACB}{\sin \sphericalangle CAB} \cdot \frac{\sin \sphericalangle BAC}{\sin \sphericalangle ABC} = 1$



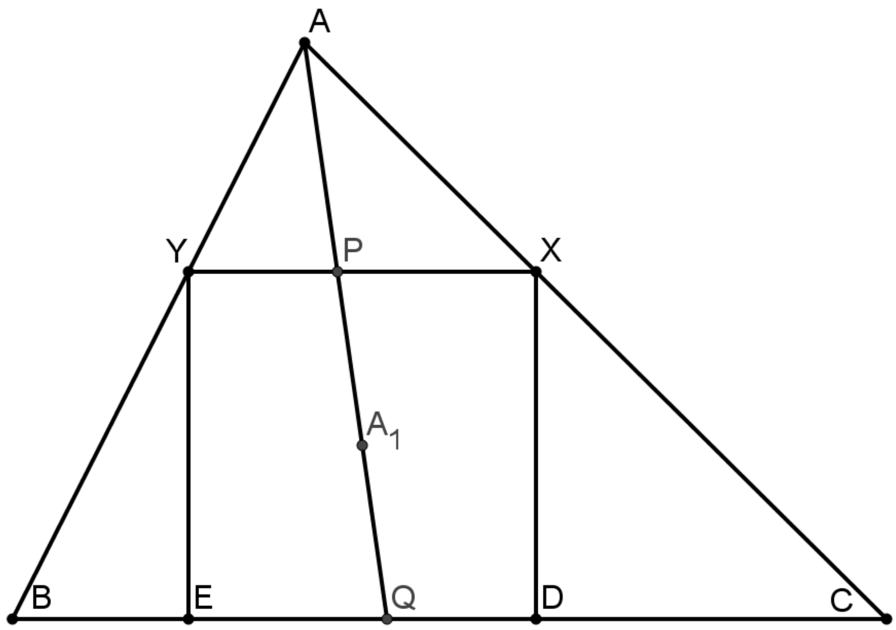
7. במשולש ABC חסום ריבוע, כך ששני מקודקודיו נמצאים על הצלע BC, קודקוד אחד על AC וקודקוד אחד על AB. מרכז הריבוע יסומן A_1. באופן דומה נגדיר את B_1, C_1. הוכיחו כי AA_1, BB_1, CC_1 נפגשים בנקודה.

פתרון: קודקודי הריבוע עם מרכז ב-A_1 הנמצאים על BC יסומנו D, E, הקודקוד על AB יסומן X, והקודקוד על AC, יסומן Y. נקודות החיתוך של AA_1 עם XY, BC יסומנו P, Q בהתאמה.

נחשב את היחס $\frac{BQ}{QC}$:

$$\frac{BQ}{QC} = \frac{YP}{PX} = \frac{S_{AYA_1}}{S_{AXA_1}} = \frac{AY \cdot YA_1 \cdot \sin \sphericalangle \mathrm{AYA_1}}{AX \cdot XA_1 \cdot \sin \sphericalangle \mathrm{AXA_1}} =$$
$$\frac{AY \cdot \sin(\sphericalangle \mathrm{AYX} + 45^o)}{AX \cdot \sin(\sphericalangle \mathrm{AXY} + 45^o)} = \frac{AB \cdot \sin(\sphericalangle \mathrm{ABC} + 45^o)}{AC \cdot \sin(\sphericalangle \mathrm{ACB} + 45^o)}$$

באופן דומה נקבל ביטויים דומים עבור שלושת הריבועים האחרים וברור כי מכפלת שלושת הביטוי תצא 1, מה שיסיים מצ'בה.



8. נתון משולש ABC, M זה אמצע הצלע BC ו-H הוא מפגש הגבהים. על הצלעות AB, AC נבחרו נקודות D, E בהתאמה כך ש-$AD = AE$ ו-D, H, E על ישר. הוכיחו כי HM מאונך לציר הרדיקלי של המעגלים החוסמים של ABC ו-ADE.

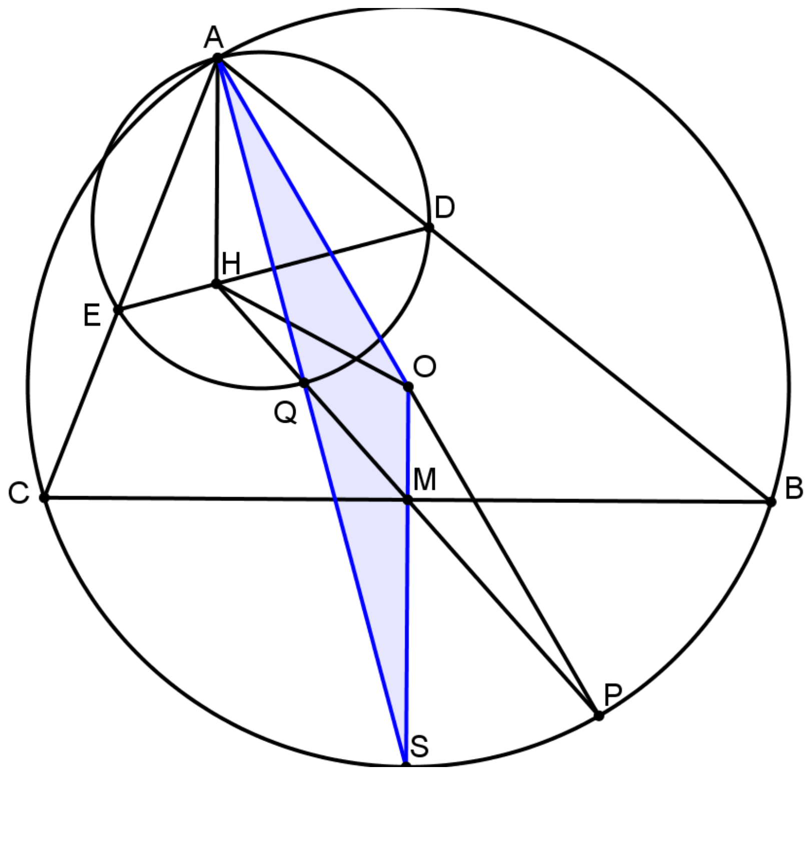
פתרון ראשון: נסמן את הנקודה הנגדית ל-A על המעגל החוסם של ABC ב-P ואת הנקודה הנגדית ל-A על המעגל החוסם של ADE ב-Q.

ביקשו להוכיח ש-MH מקביל לישר המרכזים של ABC ו-ADE אבל ישר המרכזים בברור מקביל ל-PQ ולכן מספיק להוכיח ש-MH מקביל ל-PQ.

נשים לב ש-$BHCP$ מקבילית, זאת מפני ש-BH מאונך ל-AC וכך גם CP, על כן BH מקביל ל-CP ובאותו אופן BP מקביל ל-CH ולכן זו מקבילית.

כידוע במקבילית אלכסונים חוצים זה את זה ולכן PH חוצה את BC, כלומר עובר ב-M ולכן בשביל לסיים את השאלה מספיק להוכיח ש-PM עובר ב-Q.

$AD = AE$ ולכן AQ זה חוצה הזווית $\measuredangle BAC$, נסמן את נקודת החיתוך שלו עם המעגל החוסם של ABC ב-S.



נשתמש במנלאוס עבור המשולש AOS, נרצה להוכיח ש-P, Q, M על ישר, כלומר ש-

$$\frac{SQ}{QA} \cdot \frac{AP}{PO} \cdot \frac{OM}{MS} = -1$$

ברור ש- $\frac{AP}{PO} = -2$ ולכן צריך להוכיח ש-

$$\frac{SQ}{QA} = \frac{MS}{2MO}$$

נחשב את $\frac{SQ}{QA}$: $\frac{SQ}{QA} = \frac{SA}{QA} - 1$, ממשפט הסינוסים במשולש ABS נובע ש- $SA = 2R\sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)$ כאשר R זה רדיוס של המעגל ABC ו-α, β מסמנות את $\sphericalangle BAC, \sphericalangle ABC$ בהתאמה.

בנוסף ממשפט הסינוסים במשולש ADE נובע ש- $QA = \frac{AD}{\sin\sphericalangle AED}$

ואילו ממשפט הסינוסים במשולש AHD נובע ש- $\frac{AD}{\sin\sphericalangle AHD} = \frac{AH}{\sin\sphericalangle ADH}$

נשים לב ש- $\sphericalangle AHD = \beta + \frac{\alpha}{2}, \sphericalangle AED = \sphericalangle ADH = 90^{o} - \frac{\alpha}{2}$

ולכן

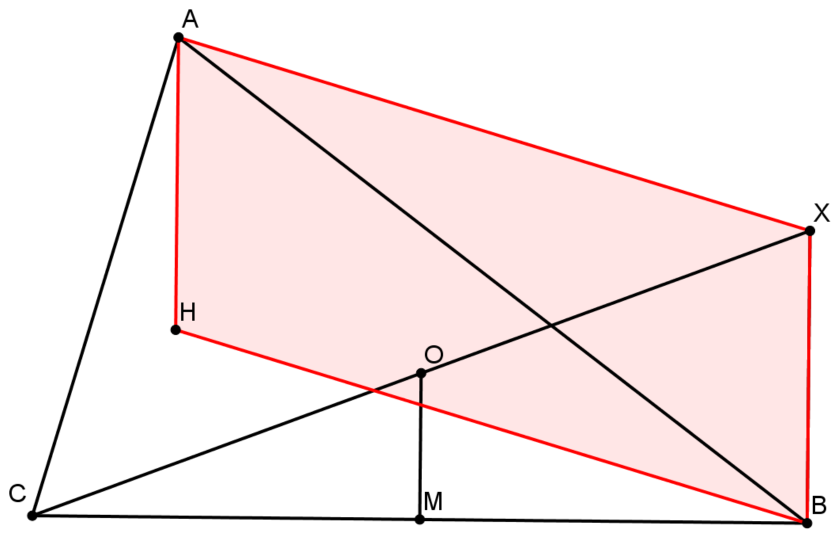
$$QA = \frac{AH \cdot \sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(90^{o} - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(90^{o} - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{AH \cdot \sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

נציב את הכל ונקבל:

$$\frac{SQ}{QA} = \frac{2R\sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)}{\frac{AH \cdot \sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} - 1 = \frac{2R\cos\frac{\alpha}{2}}{AH} - 1$$

כל זברה יודעת ש-$AH = 2MO$, נזכיר את אחת ההוכחות לטענה זו:

נשלים את AHB למקבילית $AHBX$. נשים לב ש-BX מאונך ל-BC, כי הוא מקביל ל-AH, ו-AX מאונך ל-AC, כי הוא מקביל ל-BH. לפיכך קיבלנו כי A, B נמצאות על מעגל שקוטרו CX ומרכזו כמובן ב-O, כי O זה מרכז ABC. מכל זאת נובע כי O הוא אמצע CD, מצד שני M מוגדר להיות האמצע של BC ולכן OM הוא קטע אמצעים במשולש BXC ולכן הוא שווה למחציתו כלומר $AH = 2MO$.



קיבלנו שאנו רוצים להוכיח ש-

$$\frac{2R \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2} - 2MO}{2MO} = \frac{MS}{2MO}$$

כלומר מספיק להוכיח ש-

$$R \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2} - MO = \frac{R - MO}{2}$$

ולכן מספיק להוכיח ש-

$$R\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\right) = MO$$

אבל במשולש MOB הזווית ב-M ישרה והזווית ב-B שווה $90^o - \alpha$

ולכן

$$\frac{MO}{R} = \sin(90^{o} - \alpha) = \cos\alpha$$

ולכן מספיק להוכיח ש-

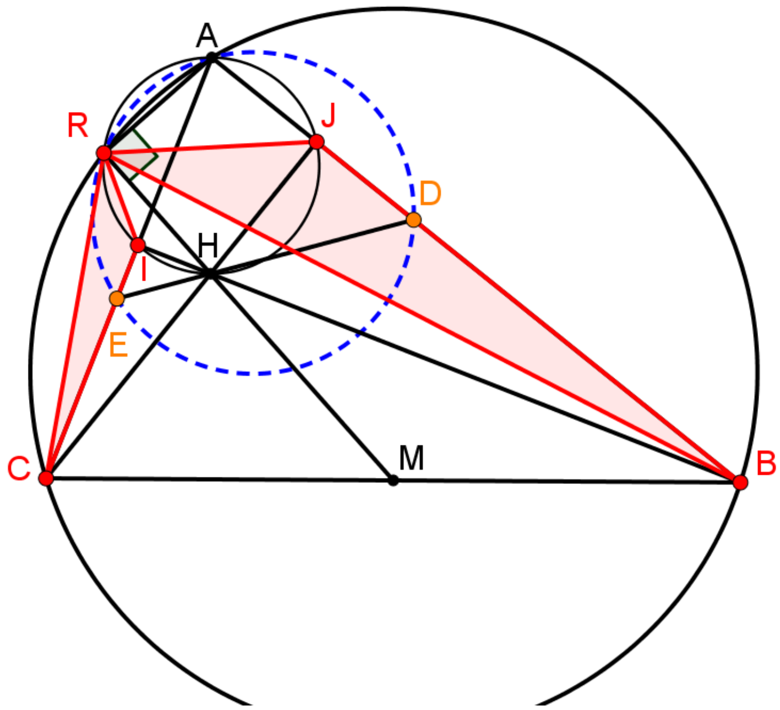
$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 = \cos\alpha$$

שזה נכון.

פתרון שני: פתרון זה משתמש בהעתקות ספיראליות, באופן ספציפי בלמה החשובה, למת העתקה הספירלית: כאשר יש שני מעגלים הנחתכים בשני נקודות יש העתקה ספירלית עם מרכז בנקודת חיתוך אחת שהיא בעצם הטלה מהמעגל הראשון למעגל השני דרך נקודת החיתוך השנייה.

כפי שהסברנו בפתרון הראשון MH עובר בנקודה הנגדית ל-A על המעגל החוסם של ABC ולכן אם נסמן את נקודת החיתוך השנייה של MH עם המעגל החוסם של ABC ב-R נקבל שהזווית $\sphericalangle ARH$ ישרה, כלומר ש-R נמצאת על המעגל שקוטרו AH. כמובן שגם עקבי הגבהים מ-B, C, שנסמן אותם I, J בהתאמה, נמצאים על המעגל שקוטרו AH. לפיכך לפי למת העתקה הספירלית נקבל שיש העתקה ספירלית עם מרכז ב-R המעבירה את I ל-C ואת J ל-B. כלומר המשולשים RIC, RJB דומים.

בנוסף ברור שהמשולשים IHC, JHB דומים מכיוון שהזוויות ב-I וב-J ישרות והזוויות ב-B וב-C שוות מכיוון ששתיהן משלימות את הזווית $\sphericalangle BAC$ ל-90^{o}.



נשים לב לשוויון הזוויות $\measuredangle HDJ = \measuredangle HEI$, משמעות השוויות הזה עבורנו היא שהנקודות D, E הן נקודות מתאימות במשולשים הדומים IHC, JHB כלומר E, D מחלקות את IC, BJ באותו יחס ולכן הן נקודות מתאימות גם בזוג המשולשים הדומים RIC, RJB. לפיכך אנו מקבלים כי גם המשולשים REC, RDB דומים ולכן מהטענה ההפוכה ללמת העתקה הספירלית נקבל כי R נמצאת על המעגל ADE ולכן AR הוא הציר הרדיקלי של ADE ו-ABC ולפי מה שאמרנו בתחילת הפתרון הוא מאונך ל-MH.

9. ישר אוילר של משולש הוא ישר העובר במפגש הגבהים, מפגש התיכונים ומרכז המעגל החוסם של המשולש.

נתון משולש ABC, מרכז המעגל החסום במשולש יסומן I. הוכיחו כי ישרי אוילר של המשולשים ABC, AIB, AIC, BIC נפגשים בנקודה.

פתרון: נחשב באיזה יחס ישר אוילר של AIC מחלק את ישר אוילר של ABC.

סימונים: O מרכז המעגל החוסם של ABC, D אמצע הצלע AC, S זה אמצע הקשת AC, M מפגש התיכונים ב-ABC, M' מפגש התיכונים ב-AIC, X חיתוך של ישרי אוילר של ABC ו-ABI.

מרכז המעגל של AIC זה S, זה משפט התלתן (למי שלא מכיר זה תרגיל נחמד בחשבון זוויות). מכך נובע שישר אוילר של AIC זה SM'.

המתרה שלנו היא לחשב באיזה יחס SM' מחלק את MO.

לשם כך נשתמש במשפט מנלאוס על המשולש OMD והישר SM'. נשים לב ש-S נמצא על OD ואת החיתוך של SM' עם MD נסמן Y, ממשפט מנלאוס אנחנו מקבלים ש-

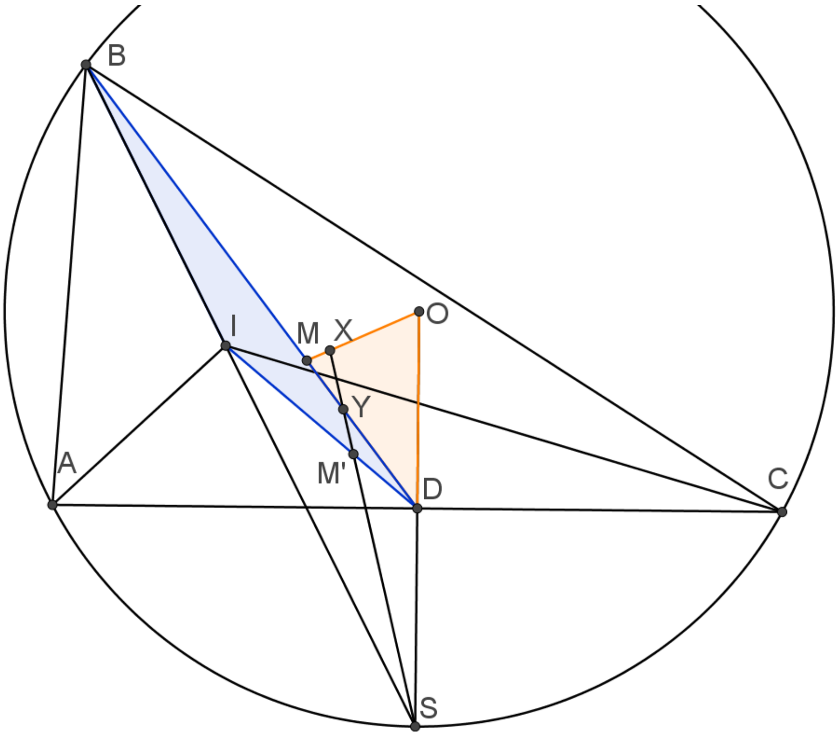
$$\frac{OS}{SD} \cdot \frac{DY}{YM} \cdot \frac{MX}{XO} = -1$$

נשים לב שאנחנו די מבינים את $\frac{OS}{SD}$ ולכן המטרה שלנו תהיה למצוא את $\frac{DY}{YM}$. בשביל זה שוב נשתמש במשפט מנלאוס אבל הפעם על משולש BID

ושוב אותו הישר SM': S נמצא על BI, M' על ID ו-Y על DM שהוא גם BD. לכן ממנלאוס נקבל ש-

$$\frac{BS}{SI}\cdot\frac{IM'}{M'D}\cdot\frac{DY}{YB}=-1$$

אבל $\frac{IM'}{M'D}=2$ ולכן $\frac{DY}{YB}=\frac{SI}{2SB}$.



לפני שנמשיך נעביר את היחס $\frac{BY}{YD}$ ל-$\frac{MY}{YD}$.

$$\frac{BY}{YD}=\frac{BM+MY}{YD}=\frac{2MD+MY}{YD}=\frac{2(YD+MY)+MY}{YD}=\frac{3MY}{YD}+2$$

נשתמש ב-$\frac{SI}{2SB}=\frac{DY}{YB}$ ונקבל ש-

$$\frac{MY}{YD}=\frac{BY}{3YD}-\frac{2}{3}=\frac{2SB}{3SI}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3SI}\cdot(SB-SI)=\frac{2BI}{3SI}$$

סך הכל אנחנו מקבלים ש-

$$\frac{OX}{XM}=\frac{DS}{OS}\cdot\frac{MY}{YD}=\frac{2DS\cdot BI}{3OS\cdot SI}$$

נסמן את רדיוס של המעגל החוסם את ABC ב-R ואת רדיוס המעגל החסום ב-ABC ב-r. נזכר גם ש-$SI=SA$ (זה שוב תלתן) ולכן

$$\frac{DS}{SI}=\frac{DS}{SA}=\sin\measuredangle CAS=\sin\left(\frac{\measuredangle CBA}{2}\right)$$

בנוסף נשים לב ש- $BI=\frac{r}{\sin\left(\frac{\measuredangle CBA}{2}\right)}$

סך הכל מקבלים:

$$\frac{OX}{XM}=\frac{2DS\cdot BI}{3OS\cdot SI}=\frac{2}{3}\cdot\frac{r}{\sin\left(\frac{\measuredangle CBA}{2}\right)}\cdot\sin\left(\frac{\measuredangle CBA}{2}\right)\cdot\frac{1}{R}=\frac{2r}{3R}$$

אבל $\frac{2r}{3R}$ לא תלוי במשולש ACI אלה רק במשולש ABC ולכן מאותו חישוב בדיוק נקבל שישר אוילר של ABI מחלק את ישר MO ביחס של $\frac{2r}{3R}$ גם הוא, וכך גם ישר אוילר של BCI ולכן ארבעת ישרי אוילר נחתכים בנקודה וניצחנו!