

צ'בה מנלאוס

0. פתרו את כל התרגילים מהמאמר.

1. הוכיחו צ'בה זוויתי: על הצלעות BC, AC, AB של המשולש ABC נבחרו נקודות D, E, F בהתאמה. הוכיחו כי AD, BE, CF נפגשים בנקודה אם ורק אם

$$\frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle DAC} \cdot \frac{\sin \angle ACF}{\sin \angle FCB} \cdot \frac{\sin \angle CBE}{\sin \angle EBA} = 1$$

כאשר הזוויות הן זוויות מכוונות.

2. על הצלעות BC, AC, AB של המשולש ABC נבחרו נקודות D, E, F בהתאמה כך ש- D, E, F על ישר. הוכיחו כי

$$\frac{AB}{BF} \cdot \frac{FD}{ED} \cdot \frac{DB}{BC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

3. נתון משולש ABC , עקב הגובה מ- A יסומן D ועקב חוצה הזווית $\angle A$ יסומן E . המעגל החוסם של ADE חותך את הצלעות AB, AC בנקודות P, Q בהתאמה. הוכיחו כי CP, BQ, AD נחתכים בנקודה.

4. בתוך משולש ABC נבחרה נקודה X . החיתוכים של AX, BX, CX עם BC, AC, AB יסומנו D, E, F בהתאמה. הוכיחו כי החיתוכים של DE, DF עם ישר העובר ב- A ומקביל ל- BC יומנו P, Q . הוכיחו כי A היא אמצע PQ .

5. נתון משולש ABC , על צלעות המשולש כלפי חוץ נבנו שלושה משולשים ABF, BCD, ACE כך ש- $\angle BAF = \angle CAE$, $\angle CBD = \angle ABF$, $\angle ACE = \angle BCD$. הוכיחו כי AD, BE, CF נחתכים בנקודה.

6. נתון משולש ABC , H הוא מפגש הגבהים של המשולש ו- O היא מרכז המעגל החוסם של המשולש. הוכיחו כי ניתן למצוא נקודות D, E, F על BC, AC, AB בהתאמה, כך ש- $OD + HD = OE + HE = OF + HF$ והישרים AD, BE, CF נחתכים.

7. במשולש ABC חסום ריבוע, כך ששני מקודקודיו נמצאים על הצלע BC, קודקוד אחד על AC וקודקוד אחד על AB. מרכז הריבוע יסומן A_1 . באופן דומה נגדיר את B_1, C_1 . הוכיחו כי AA_1, BB_1, CC_1 נפגשים בנקודה.

8. נתון משולש ABC, M זה אמצע הצלע BC ו-H הוא מפגש הגבהים. על הצלעות AB, AC נבחרו נקודות D, E בהתאמה כך ש- $AD = AE$ ו-D, H, E- על ישר. הוכיחו כי HM מאונך לציר הרדיקלי של המעגלים החוסמים של ABC ו-ADE.

9. ישר אוילר של משולש הוא ישר העובר במפגש הגבהים, מפגש התיכונים ומרכז המעגל החוסם של המשולש.

נתון משולש ABC, מרכז המעגל החוסם במשולש יסומן I. הוכיחו כי ישרי אוילר של המשולשים ABC, AIB, AIC, BIC נפגשים בנקודה.