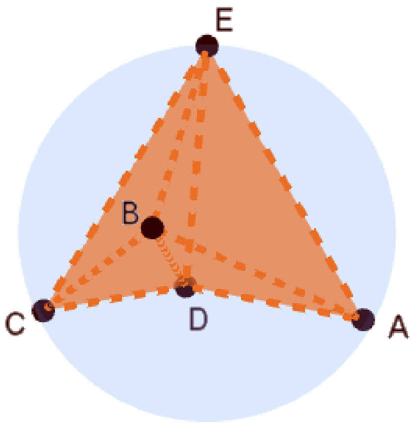
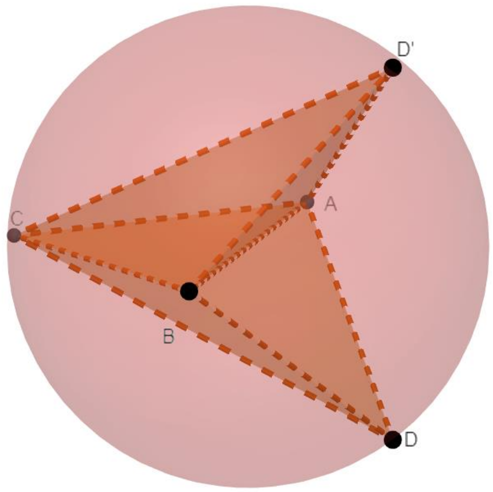
קומבינטוריקה מרחבית

1. האם ניתן לחסום פאון לא קמור בתוך ספירה?



פתרון ראשון: יהיו A, B, C, D נקודות לא במישור אחד אבל קרובות להיות במישור אחד, ונקודה E שהיא על אותה קליפה כדורית אבל רחוק מהמישור. נגיד ש-A, B, C, D קרובות למישור ומסודרות בסדר זה. ניתן לחשוב על מרובע מרחבי מכופל ABCD בשתי דרכים: דרך אחת היא שני המשולשים ABC ו-CDA שמתחברים לאורך הצלע המשותפת AC; הדרך השנייה היא לחבר את שני המשולשים BCD ו-DAB שמתחברים לאורך BD. מכיוון שהנקודות לא באותו מישור, שני המרובעים המרחביים האלה מכופלים לכיוונים הפוכים. לכן אם נחבר את E למרובע מרחבי כזה על מנת ליצור מנסרה מאווטת, במקרה אחד היא תהיה קמורה ובמקקה השני – לא.

פתרון שני: נבחר שלוש נקודות A, B, C על מישור שעובר במרכז הספירה. נבחר נקודה D על הספירה ונשקף אותה ביחס למישור של A, B, C ונקבל את D'. נגרור את D "הצידה" כך ש-DD' לא יחתך עם ABC ואז הפאון $ABDCD'$ לא יהיה קמור.



2. האם קיים פאון קמור שכול פאותיו הן משולשים, הוא לא טטראדר, ונקודה P בתוך הפאון כך שלכל פאה קיים קודקוד של הפאון כך ש-P נמצא בתוך הטטראדר הנוצר על ידי הפאה והקודקוד?

פתרון: נשים לב שלכל קודקוד X של הפאון יכולה להתאים רק פאה אחת שתיצור אתו טטראדר שיכיל את P, זאת מפני שהישר דרך X ו-P חותך את הפאון בדיוק פעמיים, פעם אחת ב-X ופעם שנייה בפאה כלשהי.

לפיכך נקבל שכמות קודקודי הפאון קטנה או שווה לכמות פאותיו.

מנוסחת אוילר אנו יודעים ש- $v-e+f=2$, בצד שני אמרנו כבר ש-$v \geq f$ ובגלל שכל פאה היא משולש נקבל ש- $2e=3f$ סך הכל נקבל

$$2=v-e+f \geq f-\frac{3}{2}f+f=\frac{f}{2}$$

כלומר $f \leq 4$ ולכן הפאון היחיד שמקיים את התנאי הוא טטראדר.

3. מהי כמות הנקודות המינימלית שצריך לסמן על השפה של

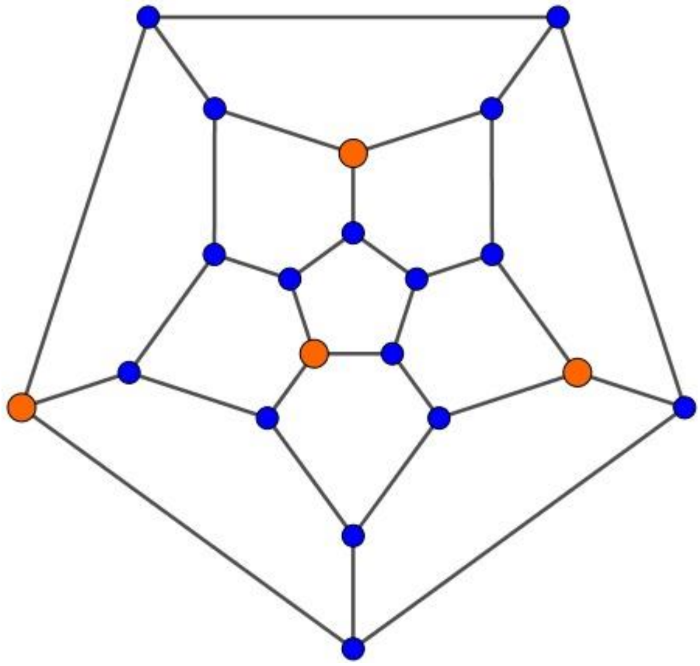
א. תריסרון

ב. עשרימון

בכדי שעל כל פאה תהיה נקודה מסומנת אחת לפחות?

פתרון: א. נשים לב שלתריסרון 12 פאות וכל קודקוד שייך ל-3 פאות, על כן לא נצליח עם פחות מ-4 קודקודים.

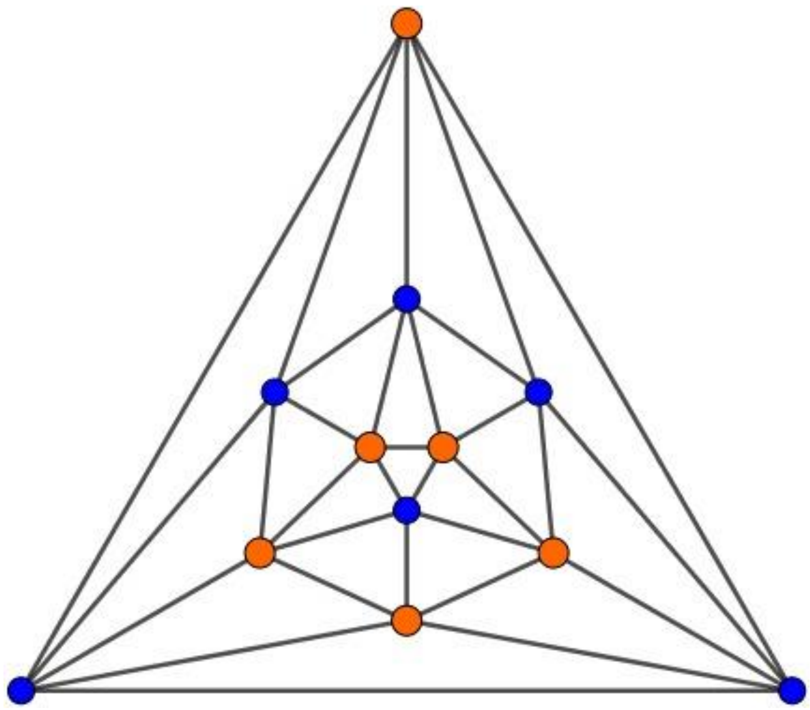
דוגמה ל-4:



ב. לעשרימון 12 קודקודים המתחלקים לזוגות של קודקודים נגדיים.

נניח כי יש זוג של קודקודים נגדיים ששניהם לא מסומנים, אז מסביב לכל אחד משני הקודקודים יש 5 פאות וצריך לסמן לפחות 3 קודקודים בשביל לרצות את חמש הפאות של הקודקוד הראשון ועוד 3 קודקודים בשביל הפאות השני ולכן במקרה זה לא נצליח עם פחות מ-6. מצד שני אם בכל זוג של קודקודים נגדיים סומן קודקוד אחד לפחות אז גם במקרה זה סימנו לפחות 6 קודקודים.

דוגמה ל-6:



4. במרחב נתונים ארבעה ישרים כך שכל שני ישרים מצטלבים. האם ניתן לבחור נקודה אחת על כל ישר כך שהמרובע שייווצר יהיה

א. טרפז? ב. מקבילית?

תשובה: א. כן   ב. לא בהכרח אבל בדרך כלל כן.

פתרון: נגיד ששני ישרים מצטלבים יוצרים כיוון של מישורים, כלומר כל המישורים המקבילים לשני הישירים.

נבחר מישור ונטיל שני ישרים למישור. נשים לב שאם המישור לא מאונך למישור הנוצר על ידי שני הישרים אז ההטלות של הישרים יחתכו.

לכן אם המישור שהטלנו אליו לא מאונך לאף אחד מהמישורים הנוצרים על ידי זוגות של ישרים נקבל שההטלות של כל שני ישרים נחתכות, כלומר קיבלנו מרובע.

נשים לב שלכל קודקוד של המרובע מתאימות שתי נקודות על זוג הישרים והישר המחבר את שתי הנקודות מאונך למישור ההטלה. כעט נבחר שני קודקודים נגדיים של המרובע הם יתאימו לארבע נקודות על הישרים כך שיהיו שני קטעים המאונכים למישור ההטלה, כלומר ארבעת הנקודות יוצרות טרפז. הערה: ברור שאם בחרנו שני קטעים מקבילים במרחב אז המרובע הנוצר על ידי שני הקטעים חייב להיות מישורי.

נשים לב ששיקרנו, אם כל זוג של ישרים מוטלים נחתכים זה לא בהכרח אומר שקיבלנו מרובע, יכלנו לקבל ארבע ישרים שכולם נחתכים בנקודה אחת ואז "הטרפז" שנקבל יהיה טרפז חד ממדי כלומר שני קטעים על ישר אחד וזה לא טרפז.

לכן חשוב לבחור טוב את המישור שאנו מטילים אליו.

נבדוק מתי קורה המצב שיש ישר החותך שלושה ישרים מצטלבים בנקודה אחת. נראה שזה מצב שיכול לקרות, נבחר נקודה על הישר הראשון ונבחר אותה לכל הנקודות על הישר השני, זה נותן מישור והמישור הזה יחתוך את הישר השלישי בנקודה אחת כיוון שאם הוא חותך אותו ביותר מנקודה אחת זה אומר שהישר השני והשלישי נמצאים במישור אחד, כלומר לא מצטלבים. קיבלנו שיש ישרים החותכים את שלושת הישרים בנקודה אחת אבל יש הרבה יותר ישרים שלא עושים את זה ולכן יחסית ברור שנצליח לבחור כיוון של מישור הטלה שיהיה טוב.

ב. נראה איך אפשר לבנות מקבילית מקרים לא מנוונים ואז נסביר מה הם בדיוק המקרים שבהם אי אפשר לבנות מקבילית.

נבחר שני ישרים ונתסכל על המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שהן אמצעים בין שתי נקודות על הישרים (אסור שתי נקודות על אותו ישר).

נטען כי המקום הגיאומטרי הזה הוא מישור. נבחר שתי נקודות על הישרים המצע שלהם הוא נקודה, עכשיו אם נזיז את אחת הנקודות על השיר שלה אמצע יזוז בחצי מהווקטור שבה הזזנו את הנקודה, כלומר אפשר להזיז את האמצע בכל ווקטור המקביל לישר הראשון וכך גם אפשר להזיז אותה בכל ווקטור המקביל לישר השני ולכן קיבלנו מישור.

נתבונן במישור האמצעים של הישר הראשון והשני ומישור האמצעים של הישר השלישי והרביעי, אם שני המישור האלו נחתכים אז אפשר לבחור נקודה על ישר החיתוך והנקודה הזו אמצע בין שתי נקודות על הישר הראשון והשני ואמצע בין שתי נקודות על הישר השלישי והרביעי ולכן קיבלנו מקבילים כי ארבעת הנקודות נמצאות במישור אחד (כי הן נמצאות על שני קטעים נחתכים) ואנחנו יודעים שמרובע מישורי שהאלכסונים שלו חוצים זה את זה הוא מקבילית.

עכשיו נדון מקרה שמישורי האמצעים לא נחתכים. דבר ראשון נשים לב שאפשר לשנות את זוגות הישרים (כלומר במקום ראשון עם שני ושלישי עם רביעים אפשר ראשון עם שלישי ושני עם רביעי) ואם אז מישורי האמצעים לא יקבילו עדיין נמצא מקבילית. כלומר לכל שני ישרים מישור האמצעים שלהם מקביל למישור האמצעים של הזוג השני, אבל מישור האמצעים של שני ישרים מקביל לשני הירשים ולכן קיבלנו שארבעת הישרים נמצאים במישורים מקבילים. במקרה הזה ברור שאין מקבילית כיוון שהטיעונים שלנו היו אם ורק אם כלומר אם מצאנו מקבילית אז מישורי האמצעים חייבים להיחתך.

5. האם ניתן לרצף את המרחב עם טטראדרים זהים שבהם לכל פאה יש זווית ישרה?

תשובה. כן.

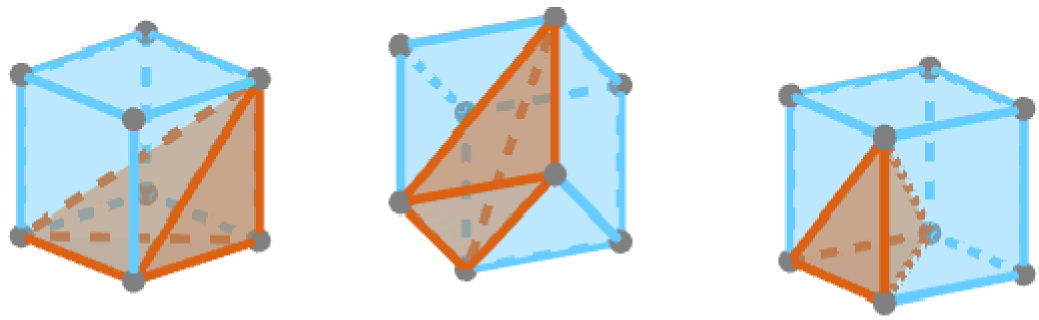
פתרון ראשון: נתבונן בקוביה $[0,1]^3$. כל נקודה בתוכה מתוארת באמצאות שלישיית מספרים (x,y,z). ניתן לחלק את הקוביה ל-6 חלקים, בהתאם לסדר הגדלים של x,y,z. כך חלק אחד מתואר באמצעות אי-שוויונים $x \le y \le z$, חלק אחר הוא $z \le y \le x$, וכך הלאה, סה"כ 6 חלקים בהתאם ל-6 תמורות של 3 מספרים. החלקים חופפים, לכן אם נבין איך נראה אחד מהם נבין איך נראים גם כל 5 האחרים.

נתבונן בחלק $0 \le x \le y \le z \le 1$. הוא מכיל את הקודקודים:

$$(0,0,0), \quad (0,0,1), \quad (0,1,1), \quad (1,1,1)$$

כל נקודה (x,y,z) בחלק זה היא מרכז מסה של הקודקודים הנ"ל עם המסות $x, \quad y-x, \quad z-y, \quad 1-x-y-z$ בהתאמה, לכן הצורה היא ארבעון שאלה הם הקודקודים שלו. די ברור גם שכל פאה היא משולש ישר זווית: אם נרשום 3 קודקודים מהרשימה בסדר שבו הם רשומים, אז ווקטורי ההפרש של הקודקוד האמצעי אם שני הקודקודים האחרים מאונכים זה לזה, כי בכל קואורדינאטה אחד מהווקטורים מתאפס.

מכיוון שניתן לרצף את המרחב בקוביות בהרבה דרכים, וקובייה בארבעונים עם זוויות ישרות, המסקנה מתקבלת.



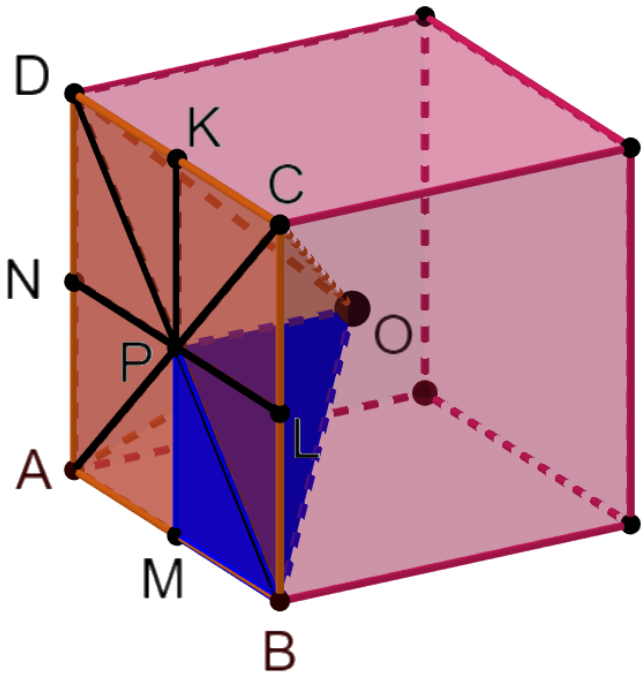
פתרון שני: נצייר קובייה ונסמן את מרכזה ב-O. נבנה פירמידה ריבועית שבסיסה יתלכד עם הפאה ABCD של הקובייה וקודקודה יהיה ב-O.
נסמן את אמצעי הקטעים AB, BC, CD, DA ב-M, L, K, N בהתאמה. מרכז הפאה יסומן ב-P. נעביר את הקטעים AC, BD, MK, NL, קטעים אלו יחלקו את ABCD לארבעה משולשים ישרי זווית חופפים.

כעט נבנה שמונה פירמידות משולשיות שבסיסיהן יהיו שמונעת המשולשים אליהם ABCD חולק והקודקוד של כל הפירמידות יהיה ב-O.

בברור כל הפירמידות הללו חופפות וכל הפאות שלהן הן משולשים ישרי זוויות.

נשאר לשים לב שחילקנו שישית קובייה ל-8 פירמידות חופפות, נבצע את אותו התהליך עם הפאות האחרות של הקובייה ובכך נחלק אותה ל-48 פירמידות חופפות.

כלומר ריצפנו קובייה עם פירמידות כנדרש ועם קוביות ניתן לרצף את המרחב.



6. משלוח בדואר הוא תיבה, עלות המשלוח שווה לסכום אורכי מקצועות הטיבה. האם ניתן לארוז משלוח עם עלות גדולה יותר בתוך משלוח עם עלות קטנה יותר?

תשובה. לא.

פתרון ראשון. לכל תיבה שצלעותיה a,b,c נגדיר R-סביבה שלה: נקודות שנמצאות במרחק R או פחות מהתיבה. צורה זאת מורכבת החלקים מהסוגים הבאים:

- התיבה עצמה, הנפח של שווה ל- abc.
- תיבות נוספות המוצמדות לפאות בגובה R. סכום הנפחים שלהם שווה ל- $2R(ab+bc+ca)$.
- רבעי גלילים ברדיוס R בסמוך למקצועות.מכל 4 רבעי גליל באותו כיוון ניתן ליצור גליל שלם, לכן סכום הנפחים שלהם שווה ל- $\pi(a+b+c)$.
- שמיניות כדור בסמוך לקודקודים, מהם היה אפשר ליצור כדור ברדיוס R, שנפחו $\frac{4}{3}\pi R^3$.

ובכן, נפח ה-R סביבה הוא

$$\frac{4}{3}\pi R^3+\pi\left(a+b+c\right)R^2+2\left(ab+bc+ca\right)R+abc.$$

נגיד התיבה $a\times b\times c$ מוכלת בתיבה $A\times B\times C$. אז R-סביבה של התיבה הראשונה מוכלת ב-R-סביבה של השנייה, בפרט יש אי-שוויון על נפחים. לכן

$$\cancel{\frac{4}{3}\pi R^3}+\pi\left(a+b+c\right)R^2+uR+v\le\cancel{\frac{4}{3}\pi R^3}+\pi\left(A+B+C\right)R^2+UR+V$$

$$mR+k\le\pi\left(\left(A+B+C\right)-\left(a+b+c\right)\right)R^2$$

אבל עבור R גדול ממש, R^2 גדול בהרבה מ-$mR+k$. לכן בהכרח $A+B+C$ חייב להיות גדול או שווה ל-$a+b+c$.

פתרון שני. כאשר מתילים את התיבה לישר באמצעות הטלה אנכית, מקבלים קטע שאורכו הוא סכום ההטלות של 3 המקצועות לישר.

בשביל להבין את זה, נניח שהישר הוא אנכי, והתיבה אולי משופעת. ניקח את הקודקוד הנמוך ביותר של התיבה, והקודקוד הנגדי הוא הגבוה ביותר. ניתן להגיע מהקודקוד הנמוך ביותר לגבוה ביותר על ידי צעדים במקצועות ב-3 הכיוונים. כל צעד מעלה את הנקודה, לכן הטלת התיבה לציר האנכי זה קטע שמורכב מהתלות של 3 המקצועות.

לכן בכל כיוון ספציפי, אם תיבה "קטנה" מוכלת בתיבה "גדולה" אז סכום ההטלות של 3 המקצועות של תיבה קטנה לכיוון הספציפי הזה קטן מסכום ההטלות הדומה עבור התיבה הגדולה.

סכום כזה תלוי לא רק בתיבות, אלה גם בכיוון. בהינתן קטע שנקבע מראש, לכל ווקטור יחידה במרחב, ניתן להגדיר את סכום ההטלות לישר שנוצר מהווקטור הזה; זו תהיה פונקציה על הקליפה הכדורית של כדור בעל רדיוס 1.

ניתן לעשות אינטגרל של פונקציה זאת על כל הקליפה הכדורית (אפשר גם לחלק ב-4π בשביל לתת לזה משמעות של הטלה ממוצעת).

אורך ההטלה הממוצע לא תלוי בכיוון של הקטע שמטילים אותו, כי זה מושג סימטרי; לכן זה קבוע כפול אורך הקטע; זה קבוע חיובי כי כמעת לכל כיוון מקבלים אורך חיובי.

עכשיו מקבלים את הפתרון בצורה כמעת מיידית. בכל הטלה, סכום הטלות המקצועות של התיבה הפנימית קטן או שווה לסכום הטלות

המקצועות של התיבה שמכילה אותה, ובדרך כלל זה גדול ממש. לכן גם בממוצע על הכיוונים, לתיבה החיצונית זה יותר גדול.

אבל זה שווה לאיזשהו קבוע כפול סכום האורכים של המקצועות, לכן סכום אורכי המקצועות של התיבה החיצונית גדול מסכום אורכי המקצועות עבור התיבה הפנימית.

7. נתונים ארבעה ישרים מצטלבים במרחב, האם ניתן להוציא את אחד הישרים מבלי לחתוך או להזיז את הישרים האחרים (להוציא הכוונה לבחור ווקטור במרחב ולהזיז את הישר בכיוון הווקטור)?

פתרון: נקרא לישרים כחול אדום שחור וירוק. נבחר מישור המאונך לישר הכחול ונטיל הכל למישור. אם הנקודה המתאימה לישר הכחול נמצאת מחוץ למשולש הנוצר על ידי שלושת הישרים האחרים אז אפשר להזיז את הישר הכחול במאונך לאחד הישרים האחרים בכיוון כלפי חוץ מהמשולש ובברור הישר הכחול יצא מבלי לחתוך כלום.

כעט נניח שההטלה של הישר הכחול נמצאת בתוך המשולש. נבחר כיוון על הישר הכחול, לכיוון החיובי נקרא למעלה ולכיוון השלישי נקרא למטה. ננסה להזיז את הישר האדום למעלה, אם הוא לא יצליח לצאת נבין שאחד מבין הישרים הירוק והשחור נמצאים מעליו, נניח ללא הגבל הכלליות שהשחור כלומר אם נסתכל על נקודת החיתוך של ההטלות של האדום ושחור אז בנקודה הזו השחור נמצא מעליו.

באותו אופן נקבל שבנקודת החיתוך של השחור עם הירוק, הירוק נמצא מעל השחור (כי אחרת השחור הכי גבוהה ואפשר להוציא אותו) ובנקודת החיתוך של האדום עם הירוק האדום נמצא מעל הירוק (כי אחרת הירוק הכי נמוך ואפשר להוציא אותו).

נתסכל על נקודת החיתוך של ההטלות של השחור עם הירוק ונבחר נקודה על הקטע שמחר את שתי הנקודות שמוטלות לנקודת החיתוך, נקרא לנקודה הזו X. נעביר ישר דמיוני דרך X המקביל לישר האדום. נתחיל להזיז את הישר הדמיוני בכיוון קבוע עד שהוא יגיע לישר האדום. נשים לב כי במהלך ההזזה הזו הישר הדמיוני חתך את הישר הכחול כי הוא נמצא בתוך משולש ההטלות, חתך את הישר השחור כי בהתחלה הישר הדמיוני היה מעל לשחור (הנקודה נבחרה מעל לשחור ומתחת לירוק) ובסוף הוא מתחת לשחור כי אמרנו שהאדום מתחת לשחור. בדיוק באותו אופן הישר הדמיוני חתך את הישר הירוק.

אם נמשיך להזיז את הישר האדום במאונך לישר הכחול הוא לעולם לא יחתוך את שלושת הישרים האחרים כיוון כאשר מזיזים ישר בכיוון קבוע

הוא יכול לחתוך ישר אחר רק פעם אחת והוא כבר חתך אותם ולכן אפשר להוציא את האדום וניצחנו.

הערה: בעצם הוכחנו כי תמיד ניתן להוציא לפחות שלושה ישרים. הוכחנו כי אם אין ישר שהוא גבוה משני הישרים האחרים אז אפשר להוציא את האדום ומאותם שיקולים גם את הירוק ושחור. במצב שבו יש ישר הכי גבוהה אז אפשר להוציא אותו אבל יש גם את הישר הכי נמוך ואפשר להוציא גם אותו.

8. הוכיחו כי ניתן למצוא 2001 פאונים קמורים במרחב כך שלאף שלושה מותכם אין נקודה משותפת אבל כל שניים משיקים (כלומר יש להם לפחות נקודה משותפת אחת על השפה אבל אין נקודות פנימיות משותפות).

פתרון: נתחיל מלצייר ציור במישור אופקי. במישור זה נצייר 2001 קווים: קו ראשון אופקי, ואז כל פעם נצייר קוו עם שיפוע חיובי שיותר גדול מהשיפועים של הקווים הקודמים. כל פעם, כאשר נצייר קו מספר K אנחנו קודם כל נבחר שיפוע שיותר גדול מכל השיפועים הקודמים, ואז נזיז את הקו ימינה, כך שהוא יהיה מימין לכל נקודות חיתוך הקודמות. לכן כאשר הולכים משמאל לימין על השיר החדש קודם נעבור בנקודת החיתוך עם הישר הראשון אחרי בנקודת החיתוך עם הישר השני ואז השלישי וכך האלה.

כעט נעביר ריבוע גדול מאוד החוסם את כל נקודות החיתוך של הישרים ונחתוך את הציור בריבוע, כלומר הישרים יהפכו לקטעים אבל כל נקודות החיתוך שרצינו תשארנה.

כל קטע מחולק על ידי קטעים בעלי מספרים קטנים יותר לחלקים, כאשר החלק הקצר ביותר באורך m והארוך ביותר באורך M.

נסמן $a=\frac{M}{m}$.

עכשיו נזיז כל אחד מבין 2001 הקטעים במאונך למישור שבו הישרים נבחרו:

את הקטע הראשון נשאיר במקום,

את הקטע השני נרים לגובה 1,

את השלישי נרים לגובה $1+a$,

את הרביעי לגובה $1 + a + a^2$,

. . .

את ה-2001 נרים לגובה $1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{1999}$.

כמובן, אם מסתכלים מלמעלה, עדיין רואים שכל הקטעים נחתכים. עבור כל קטע מספר K (כאשר $K > 1$) נציין על הקטעים האחרים נקודות שנמצאות מתחתיו. נחבר את הנקודות האלה לפי הסדר. שיפועים של קטעים עוקבים בקו השבור שנוצר עולים, כי הקפיצה בגובה כל פעם עולה פי a והקפיצה בכיוון אופקי עולה בפחות כיוון שכך בחרנו את a. אם נחבר כל קצה של קו שבור לקצה המתאים של הקטע ה-K נקבל מצולע קמור (הרי השיפוע של הקטע אחרי הקטע האחרון עוד יותר גדול, מאותה סיבה, השיפוע של קטע לפני הראשון בכלל שלילי, ולמעלה מתווסף קטע אופקי).

מתחת לקטע מספר 1 נוסיף סתם נקודה כלשהי, ונחבר אותה לשני הקצוות.

בצורה כזאת בנינו 2001 מצולעים קמורים, כל מצולע משיק מלמעלה לכל המצולעים שמספריהם קטנים יותר, ומשיק מלמטה לכל המצולעים שמספריהם גדולים יותר.

כעת ניקח ליד נקודה פנימית של כל מצולע נקודה שהיא לא במישור שלו, ונבנה פירמידה שבסיסה הוא המצולע והראש הוא הנקודה שבחרנו. אם הנקודות מספיק קרובות למצולעים שלהם, כלומר גבהי הפירמידות מספיק קטנים, אז נקבל 2001 מצולעים קמורים שמשיקים אבל לא נחתכים.