אלגברה

1. פתרו ברציונליים $x^2+xy+y^2=50$.

פתרון: אין פתרונות, נרשום $x=\frac{a}{n}, y=\frac{b}{n}$ נקבל $a^2+ab+b^2=50n^2$, נשים לב שאם a,b זוגיים אז אפשר לחלק אותם ואת n ב-2 ולקבל פתרון קטן יותר, אז אחד מהם אי-זוגי, בלי הגבלת הכלליות נניח שזה b, אבל אז

$$a^2+ab \equiv_2 a^2+a \equiv_2 a+a \equiv_2 0$$

ואם ככה a^2+ab+b^2 אי-זוגי בסתירה.

2. מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{R}^{>0}\to\mathbb{R}^{>0}$ כך שלכל x,y ממשיים חיוביים מתקיים:

$$f(x)f(y)=2f\big(x+yf(x)\big)\ \forall x,y>0$$

תשובה: $f(x)=2$.

פתרון: קל לבדוק שזה עובד, נוכיח שזו הפונקציה היחידה.

נניח $f(x)<1$, אז אפשר למצוא y חיובי כך ש-$x+yf(x)=y$ ואז נקבל:

$$f(x)f(y)=2f(y)\Rightarrow f(x)=1$$

בסתירה.

נניח $f(x)<2$ אז נקבל שלכל y:

$$f\big(x+yf(x)\big)=f(y)\left(\frac{f(x)}{2}\right)$$

$$f\Big(x+\big(x+yf(x)\big)f(x)\Big)=f\big(x+yf(x)\big)\left(\frac{f(x)}{2}\right)=f(y)\left(\frac{f(x)}{2}\right)^2$$

וכך הלאה, ולכן מתישהו נקבל ש-f של משהו יכול להיות קטן כרצוננו, אבל אז נקבל סתירה לכך ש-$f(x)\geq 1$ תמיד.

קיבלנו ש$f(x)\geq 2$, בפרט f מונוטונית, אם ככה:

$$f\big(x+yf(x)\big)=\frac{1}{2}f(x)f(y)=f\big(y+xf(y)\big)\geq f(2x)$$

אבל $x + yf(x)$ יכול להיות כל מספר גדול מ-x וקטן מ-$2x$, ואז $f(2x) \geq f(x + yf(x))$, ולכן הפונקציה קבועה בתחום הזה, אבל אם ככה הפונקציה קבועה תמיד, וקל לראות שהיא חייבת להיות קבועה 2.

3. יהי n שלם גדול מ-1. שני פולינומים P, Q יקראו *דמי-בלוקים* אם לכל

$i \in \{1,2, \ldots, n\}$ מתקיים ששתי הסדרות הבאות

$$P(2015i), P(2015i-1), \ldots, P(2015i-2014)$$

$$Q(2015i), Q(2015i-1), \ldots, Q(2015i-2014)$$

הן תמורות זו של זו.

א. הוכיחו כי קיימים שני פולינומים שונים P, Q ממעלה $n+1$ שהם דמי בלוקים.

ב. הוכיחו כי לא קיימים שני פולינומים שונים P, Q ממעלה n שהם דמי בלוקים.

פתרון: למספרים $2015i, 2015i-1, \ldots, 2015i-2014$ נקרא בלוקים.

א. נבחר $P(x) = x(x-2015)(x-2 \cdot 2015) \cdot \ldots \cdot (x-2015n)$

ו-$Q(x) = P(x-1)$.

שני הפולינומים האלו עובדים מכיוון של-$P(x)$ יש שורשים בתחילת כל בלוק ולכן כאשר נזיז אותו באחד נקבל פולינום שבפנים של הבלוק נראה אותו דבר אבל הפעם השורשים הם בסוף הבלוקים ולא בהתחלה.

ב. נניח בשלילה כי קיימים שני פולינומים P, Q ממעלה n שהם דמי בלוקים ושונים. נתמקד בבלוק אחד ונשים לב כי עבור אחד המספרים השלמים בבלוק (כאן מספר שלם בבלוק הוא אחד מהמספרים $2015i, 2015i-1, \ldots, 2015i-2014$) מתקיים ש-$P(x_1) > Q(x_1)$ ובאותו אופן עבור אחד המספרים השלמים מתקיים גם הדבר ההפוך- $P(x_2) < Q(x_2)$. מערך הביניים נקבל שקיימת נקודה (לא בהכרח שלמה) בתוך הבלוק עבורה $P(x) = Q(x)$. ברור שהפולינום $P - Q$ הוא ממעלה n לכל היותר ולכן יש לו לכל היותר n שורשים ולכן בכל אחד מהבלוקים יש בדיוק ערך אחד עבורו $P = Q$.

כעט נתבונן בפולינום $P + Q$, המתרה שלנו היא להוכיח שהפולינום הזה קבוע.

נתבונן בבלוק מסוים ונסמן ב-M את הערך המקסימלי ש-P מקבל בנקודות השלמות בבלוק וב-m את הערך המינימלי.

הוכחנו שבתוך הבלוק יש בדיוק נקודה אחת שבה $P = Q$, נסמן אותה x_0, לכן בלי הגבלת הכלליות נניח שלפני נקודה זו P גדול מ-Q ואחריה P קטן מ-Q. לפיכך נקבל

כי P חייב לקבל את הערך M לפני נקודה השוויון ואת m אחריה, Q כמובן מתנהג הפוך.

נתבונן בנקודה שבה P מקבל את M, ברור שערכו של $P+Q$ בנקודה זו הוא לפחות כערכו של $P+Q$ בנקודה שבה P מקבל את m, זאת מפני שכאשר P מקבל את M, Q מקבל לפחות את m וכאשר P מקבל את m, Q מקבל לכל היותר את M.

כלומר קיים זוג נקודות כך שהראשונה לפני x_0 והשנייה אחרי x_0 כך שערכו של-$P+Q$ בנקודה הראשונה הוא לפחות כערכו של $P+Q$ בנקודה השנייה ולכן קיימת נקודה בבלוק שבה הנגזרת של $P+Q$ אי-חיובית.

נשים לב שאנו יכולים לעשות בדיוק את אותו הטיעון על Q אבל הפעם הנקודה שבה Q מקבל את M תהיה לפני הנקודה שבה Q מקבל את m ולכן הפעם נקבל נקודה בבלוק שבה הנגזרת של $P+Q$ אי-שלילית ולכן מערך הביניים נקבל נקודה בבלוק שבה הנגזרת של $P+Q$ מתאפסת.

קיבלנו שהנגזרת של $P+Q$ מתאפסת בכל אחד מהבלוקים אבל יש לנו n בלוקים והמעלה של הנגזרת של $P+Q$ היא $n-1$ ולכן הנגזרת של $P+Q$ היא 0 זהותית ולכן $P+Q$ פולינום קבוע.

נזיז את P,Q בקבוע כך שיתקיים ש-$P+Q=0$, כלומר $P=-Q$. כבר אמרנו שבכל בלוק יש ל-P,Q נקודת שוויון, כלומר אחרי ההזזה ל-P יש שורש בכל בלוק ובנוסף כמות הערכים החיוביים והשליליים של P בנקודות שלמות של כל בלוק זהה ולכן השורש של P נמצא בדיוק באמצע של כל בלוק ולכן הנוסחה ל-P היא:

$$P(x)=k\cdot\prod_{i=1}^{n}\left(x+\frac{2015-1}{2}-2015i\right)$$

נשאר לשים לב כי 1 רחוק יותר מהשורשים של P מכל נקודה אחרת בבלוק הראשון, כלומר $|P(1)|>|P(x)|$ לכל $2\le x\le 2015$ וזו בברור סתירה לכך ש-P ו-$-P$ דמי בלוקים.

גיאומטריה

1. נתון משולש ישר זווית ABC, הזווית $\angle A$ ישרה. M, N הן אמצעי הצלעות BC, AB בהתאמה. המעגל החסום מבחוץ במשולש ACM משיק לצלע CM בנקודה D ולהמשך הצלע AC בנקודה E. הוכיחו כי הנקודות D, E, N נמצאות על ישר אחד.

פתרון ראשון: נסמן את מרכז המעגל החסום מבחוץ ב-I. נשים לב ש-$AM = BM$ ולכן MN שהוא התיכון במשולש ABM הוא גם חוצה הזווית ולכן הוא עובר דרך I. MN הוא קטע האמצעים ב-ABC ולכן הוא מקביל ל-AC, בנוסף ברור ש-EI מאונך ל-AC ולכן EI מקבל ל-AN ולכן $ANIE$ מלבן.

רוצים להוכיח ש-E, D, N על ישר, ננסה להבין את הכיוון של ישר זה.

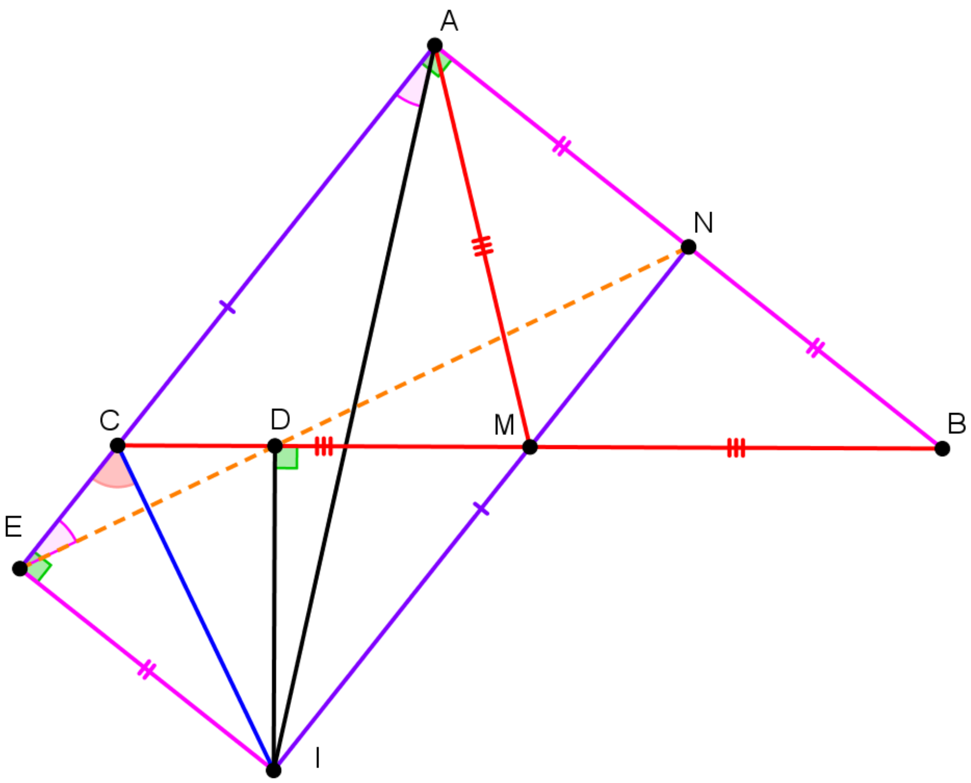
נשים לב ש-CI מאונך ל-DE ולכן מספיק להוכיח שגם NE מאונך ל-CI.

בשביל זה נחשבן טיפה:

$$\angle NEA = \angle EAI = \frac{1}{2}\angle CAM = \frac{1}{2}\angle ACM = \frac{1}{2}(180 - \angle ECM) = 90 - \angle ECI$$

השוויון הראשון נבע מהמלבן והשלישי מכך ש-AMC שווה שוקיים.

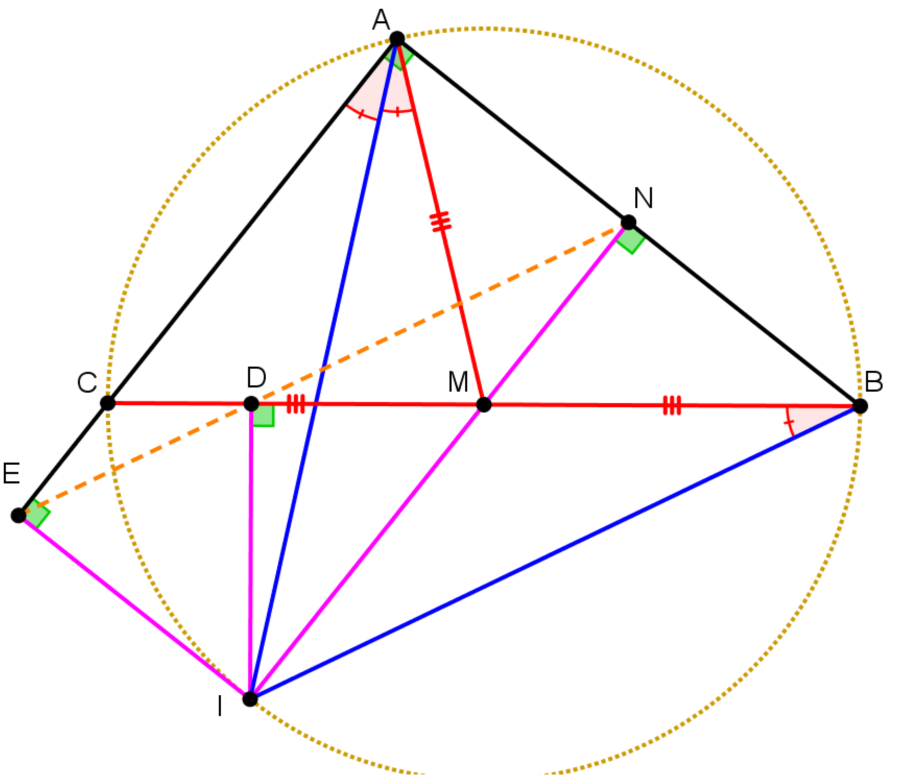
קיבלנו ש-$\angle CEN$ ו-$\angle ECI$ משלימות ל-90^o וזה בדיוק נותן את המאונכות שרצינו.



פתרון שני: כמו בפתרון השני נשים לב ש-I על MN. עכשיו נבחין ש-D, E, N הם עקבי האנכים מ-I לצלעות המשולש ABC ולכן להוכיח שהם נמצאים על ישר שקול להוכיח ש-I נמצא על המעגל החוסם של ABC אבל זה חשבון זוויות די שפוט:

$$\angle CBI = \angle MBI = \angle MAI = \angle CAI$$

ולכן יש את המעגל וניצחנו!



פתרון שלישי: נשתמש במשפט מנלאוס, צריך להוכיח ש-

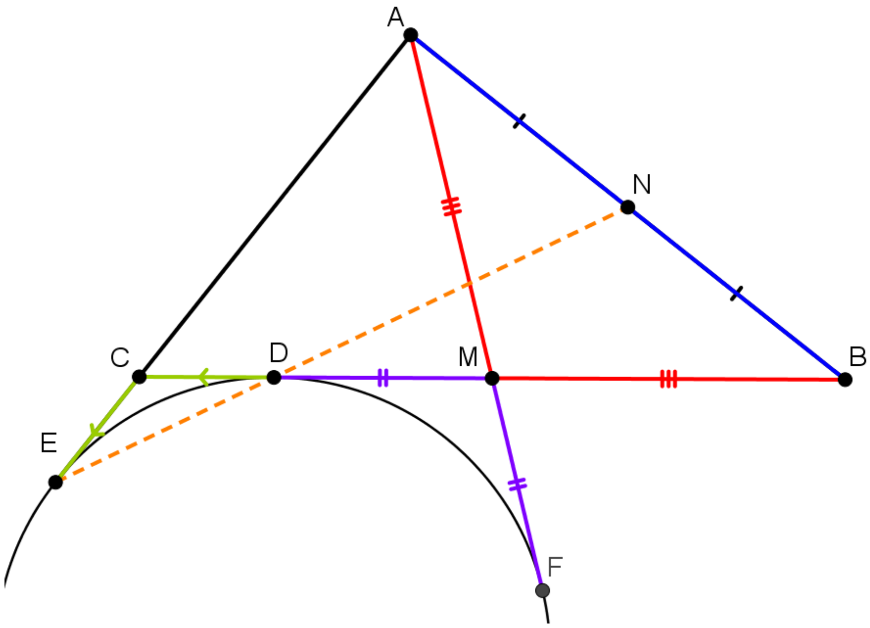
$$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BN}{NA} = -1$$

אבל $BN = NA$ ו-$EC = CD$ לכן בעצם צריך להוכיח ש-$AE = BD$.

נסמן את נקודת ההשקה של המעגל החסום מבחוץ עם הישר AM ב-F.

כמובן ש-$AE = AF$ אבל $AF = AM + MF$ ו-$AM = BM$ כי תיכון ליתר במשולש ישר זווית ו-$MD = MF$ כי המשיקים באותה נקודה שווים ולכן קיבלנו

ש-$AE = BD$. ניתחון!

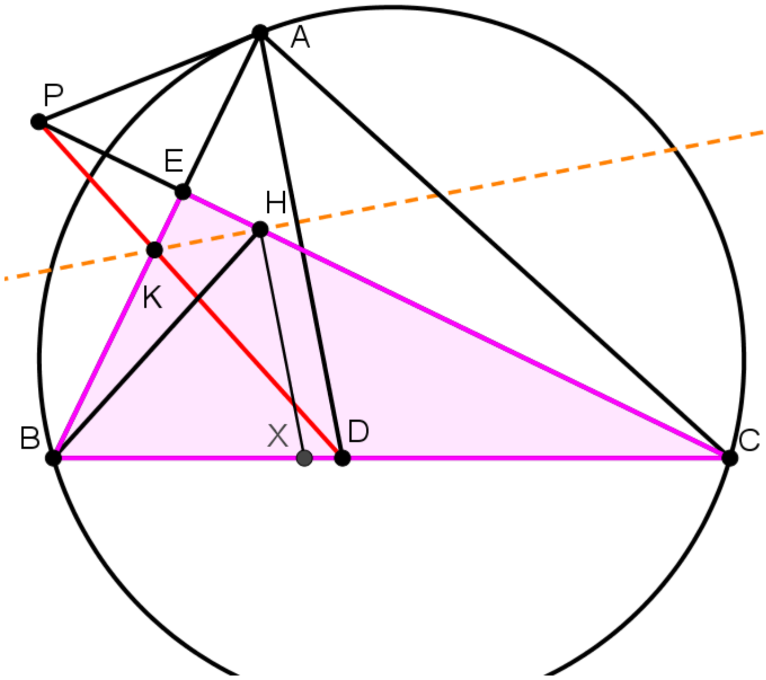


2. נתון משולש ABC. המשיק בנקודה A למעגל החוסם של המשולש חותך את הגובה מ-C בנקודה P. חוצה הזווית של $\angle A$ חותך את הצלע BC בנקודה D. הקטע PD חותך את הצלע AB בנקודה K. מפגש הגבהים במשולש יסומן H. הוכיחו כי $KH \perp AD$.

פתרון ראשון: נשים לעובדה מגניבה, חוצה הזווית של $\angle BHC$ מקביל ל-AD; זה נובע מחשבון זוויות יחסית פשוט. נגיד ש-X היא עקב חוצה הזווית של $\angle BHC$ ונחשבן

$$\angle BXH = \angle XCH + \angle XHC = 90^o - \angle CBA + \frac{1}{2}\angle BHC = 90^0 -$$
$$-\angle ABC + \frac{1}{2}(180^0 - \angle BAC) = 180^o - \angle ABC - -\frac{1}{2}\angle BAC = \angle ACB +$$
$$+\frac{1}{2}\angle BAC = \angle ADB$$

והוכחנו ש-$AD||HX$.



המתרה בשאלה היא להוכיח ש-AD מואנך ל-KH ולכן מספיק לנו להוכיח ש-HX מואנך ל-KH אבל HX הוא חוצה הזווית ולכן מספיק להוכיח ש-KH הוא חוצה הזווית החיצוני של $\angle BHC$.

בשביל זה נסמן את עקב הגובה מ-C ב-E וננסה להבין את היחס $\frac{EK}{KB}$.

נשתמש במשפט מנלאוס על המשולש BCE והישר PKD ונקבל ש-

$$\frac{EK}{BK}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CP}{PE}=-1$$

או במילים אחרות ש-

$$\frac{EK}{BK}=\frac{CD}{BD}\cdot\frac{PE}{CP}$$

לפי תוכנת חוצה זווית אנחנו יודעים ש-

$$\frac{CD}{BD}=\frac{CA}{BA}$$

ולפי תכונת חוצה זווית המוכללת אנחנו יודעים ש-

$$\frac{PE}{CP}=\frac{AE}{AC}\cdot\frac{\sin\angle PAE}{\sin\angle PAC}$$

תזכורת: תכונת חוצה הזווית המוכללת אומרת שעבור כל נקודה X על הצלע BC של משולש ABC מתקיים ש-

$$\frac{BX}{CX} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin \angle BAX}{\sin \angle XAC}$$

ההוכחה של תכונה זו היא הרכבה של משפטי סינוסים במשולשים ABX ו-ACX, סינוס של הזווית ב-X מצטמצם ומקבלים את התכונה. נשאיר להשלים את הפרטים לקורא.

בשאלה השתמשנו בגרסה חיצונית של תכונה זו כאשר הנקודה הייתה על המשך הצלע.

חזרה לשאלה:

$$\frac{EK}{BK} = \frac{CD}{BD} \cdot \frac{PE}{CP} = \frac{CA}{BA} \cdot \frac{AE}{AC} \cdot \frac{\sin \angle PAE}{\sin \angle PAC} = \frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{BD}} \cdot \frac{\sin \angle \mathrm{ACB}}{\sin \angle \mathrm{ABC}} \cdot \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AC}} =$$
$$= \frac{\mathrm{CA}}{\sin \angle \mathrm{ABC}} \cdot \frac{\sin \angle \mathrm{ACB}}{\mathrm{AB}} \cdot \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AC}} =$$
$$= \sin \angle \mathrm{ACE} = \sin \angle \mathrm{ABH} = \frac{\mathrm{HE}}{\mathrm{BH}}$$

השוויון $\sin \angle \mathrm{ACE} = \sin \angle \mathrm{ABH}$ נכון מכיוון ששתי הזוויות משלימות את הזווית $\angle \mathrm{BAC}$ ל-90^{o}.

סך הכל הוכחנו ש-$\frac{\mathrm{EK}}{\mathrm{BK}} = \frac{\mathrm{HE}}{\mathrm{BH}}$ כלומר בדיוק הוכחנו ש-KH הוא החוצה זווית החיצוני של $\angle \mathrm{BHC}$ וזה בדיוק מה שרצינו.

פתרון שני: תהיה M נקודת החיתוך של AD ו-CE. נשים לב ש-MH מואנך ל-AK ולכן בעצם השאלה שקולה ללהוכיח ש-H הוא מפגש הגבהים של AKM כלומר מספיק להוכיח ש-AH מונך ל-KM או במילים אחרות ש-KM מקביל ל-BC ובשביל זה נצטרך לעבוד קצת.

נרצה להוכיח ש- $\frac{PK}{KD} = \frac{PM}{MC}$.

מתכונת חוצה הזווית המוכללת נובע ש-

$$\frac{PK}{KD} = \frac{PA \cdot \sin \angle PAK}{AD \cdot \sin \angle KAD} = \frac{PA \cdot \sin \angle C}{AD \cdot \sin \frac{1}{2} \angle A}$$

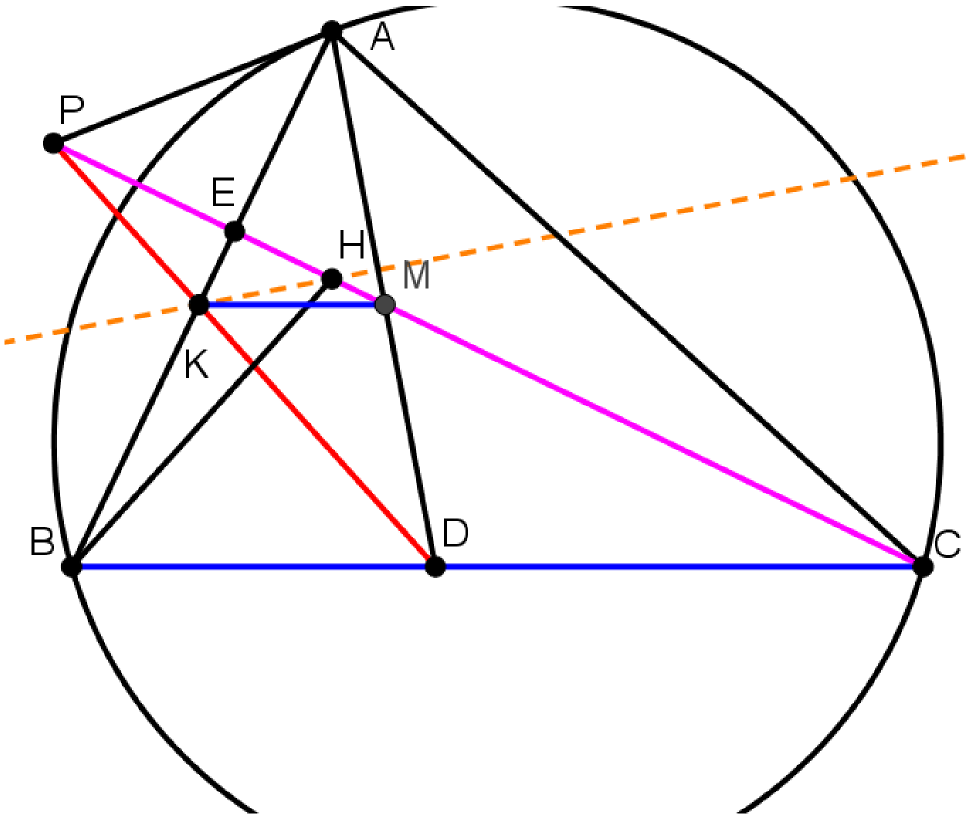
נעבור ל- $\frac{PM}{MC}$. שוב נשתמש בתכונת חוצה הזווית המוכללת ונקבל ש-

$$\frac{PM}{MC} = \frac{PA \cdot \sin \angle PAM}{AC \cdot \sin \angle CAM} = \frac{PA}{AC} \cdot \frac{\sin\left(\angle C + \frac{1}{2} \angle A\right)}{\sin \frac{1}{2} \angle A}$$

קיבלנו שמספיק להוכיח ש-

$$\frac{\sin\angle C}{AD}=\frac{\sin\left(\angle C+\frac{1}{2}\angle A\right)}{AC}$$

אבל זה פשוט משפט הסינוסים ב-ADC. ניצחון!



פתרון שלישי: פתרון זה מתבסס על ערך השוויון, אחד הדברים שערך זה אומר הוא שישר ומעגל נחתכים פעמיים.

בשאלה יש לנו מספר ישרים שחותכים את המעגל החוסם של המשולש רק פעם אחת ולכן נרצה להוסיף את נקודות החיתוך השניות של ישרים אלו.

נגדיר את S להיות החיתוך של AD עם המעגל החוסם ואת G להיות החיתוך של CH עם המעגל החוסם.

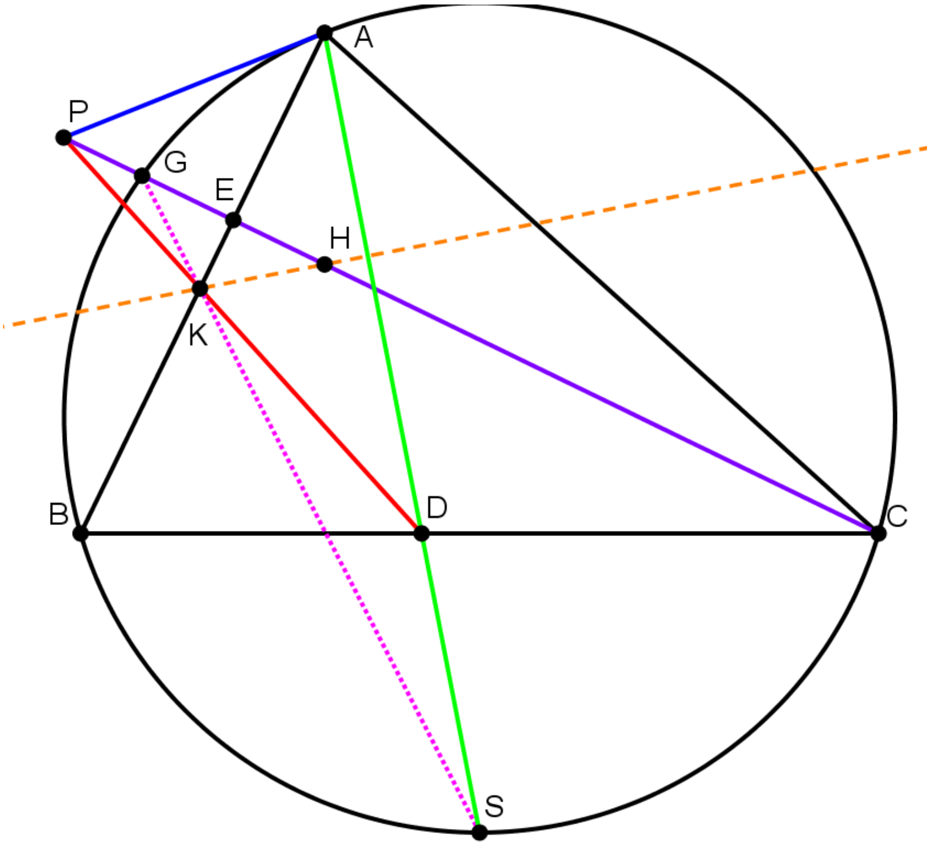
נשתמש במשפט פסקל על המרובע $AAGBSC$ ונקבל ששלושת החיתוכים: AA עם CG שזה כמובן P, AS עם BC שזו הנקודה D ו-AB עם GS, נמצאות על ישר אחד. אבל החיתוך של PD עם AB זו הנקודה K ולכן K נמצאת על GS.

עכשיו נוכל להבין את הכיוון של KH. כולנו יודעים ש-G הוא השיקוף של H ביחס ל-AB ולכן הזווית $\angle AKH$ שאנחנו כל כך רוצים להבין שווה לזווית $\angle AKG$ והיא

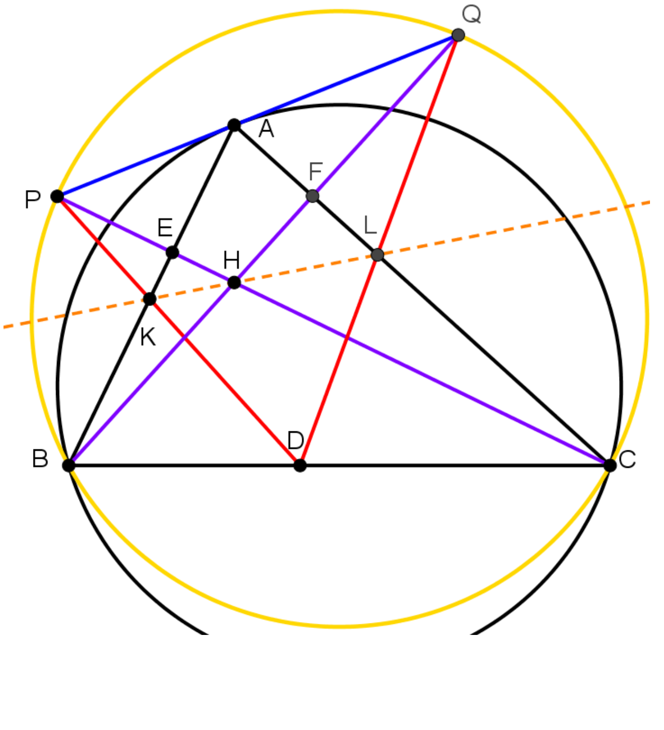
בתורה שווה לסכום הזוויות הנשענות על הקשתות AG ו-BS. כלומר אנחנו מקבלים ש-

$$\angle AKH = \angle ACG + \angle BAS = 90^o - \angle BAC + \frac{1}{2}\angle BAC = 90^o - \frac{1}{2}\angle BAC$$

אבל זה בדיוק מה שרצינו להוכיח.



רעיון לפתרון רביעי: אפשר לעשות ערך שוויון אחר. בשאלה מדברים על חיתוך המשיך ב-A עם הגובה מ-C ולכן הגיוני להוסיף גם את החיתוך של המשיק ב-A עם הגובה מ-B, נסמן נקודה זו ב-Q ובאופן דומה ל-K נגדיר את L להיות החיתוך של DQ עם AC.



מפאפוס על B, D, C ו-Q, A, P מקבלים ש-K, H, L ישר. עכשיו ברור שבעצם מבקשים להוכיח ש-L ו-K סימטריות ביחס לחוצה הזווית של A.

קל להבחין שהמרובע $BCQP$ חסום:

$$\angle QBC = 90^o - \angle ACB = 90^o - \angle PAB = \angle APC = \angle QPC$$

ומפה אפשר לסיים עם קצת חשבון זוויות קצר.

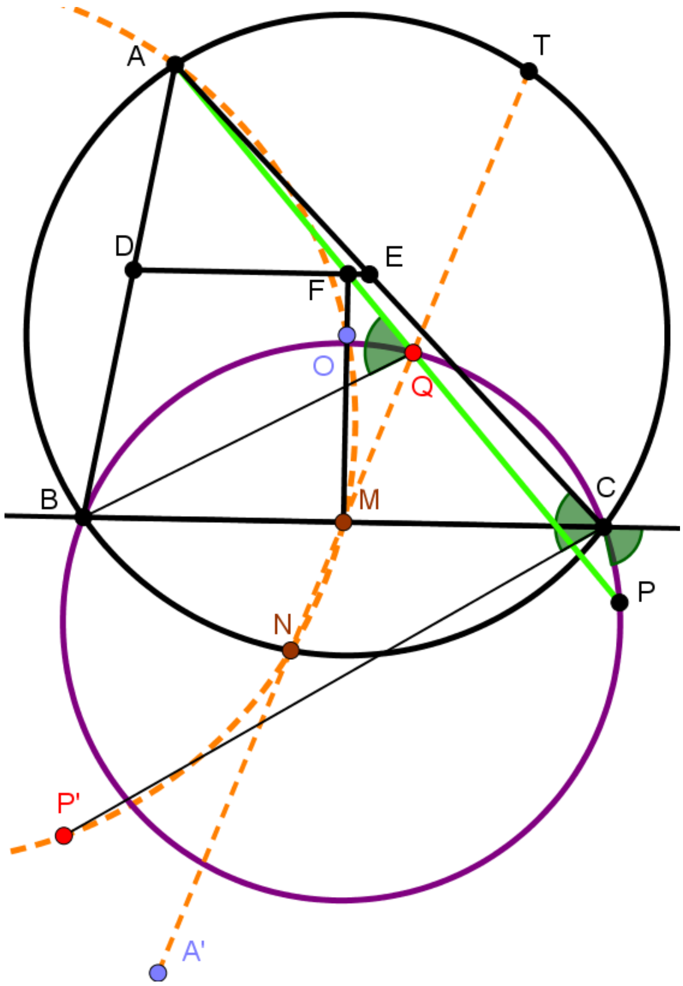
3. נתון משולש ABC ו-M היא אמצע BC. נתון ישר l המקביל ל-BC. נקודות החיתוך של l עם הצלעות AB, AC יסומנו D, E בהתאמה. O הוא מרכז המעגל החוסם של ABC ו-F זו ההטלה של O על l. המעגלים החוסמים של DFC ו-EFB נחתכים שנין בנקודה P. תהיה P' הנקודה הצמודה איזוגונלית ל-P ביחס ל-ABC. הוכיחו כי A, O, M, P' נמצאות על מעגל אחד.

פתרון: נעשה אינוורסקישוף ב-A שמחליף בין B ל-C. מה יקרה למעגל שאנחנו רוצים להוכיח? O תעבור לשיקוף של ביחס ל-BC כי הנקודה הנגדית ל-A המעגל החסום תעבור לעקב הגובה מ-A ל-BC, נסמן את השיקוף של A ב-A'. AM יעבור לתיכושקף ו-M שהייתה על הצלע תהפוך לנקודה על המעגל החוסם ולכן M תעבור לחיתוך של התיכושקף עם המעגל החוסם, נסמן נקודה זו ב-N. P' תעבור לאיזושהי נקודה על AP שנקרה לה Q. אנחנו רוצים להוכיח ש-A', N, Q ישר.

ננסה להבין את הישאר הזה יותר טוב. נסמן ב-T את הנקודה שמשלימה את ABC לטרפשוש. נשים לב ש-TN הוא התיכון ב-TBC, זה ברור כי AN היה התיכושקף ב-ABC. בנוסף אם נשקף את T ביחס לאנך האמצעי של BC ואז ביחס ל-BC עצמו נגיע ל-A' אבל ההרקבה של שני השיקופים האלו היא פשוט סיבוב ביחס ל-M ב-180° ולכן קיבלנו ש-A', N, M, T ישר.

נעבור ל-Q וננסה להבין דברים עליו. אנחנו יודעים ש-$\angle(BC, CP) = \angle(P'C, AC)$

אבל מאינוורסשיקוף אנחנו יודעים ש-$\angle(BQ, QA) = \angle(P'C, CA$ סך הכל אנחנו מקבלים ש-$BQCP$ חסום במעגל.



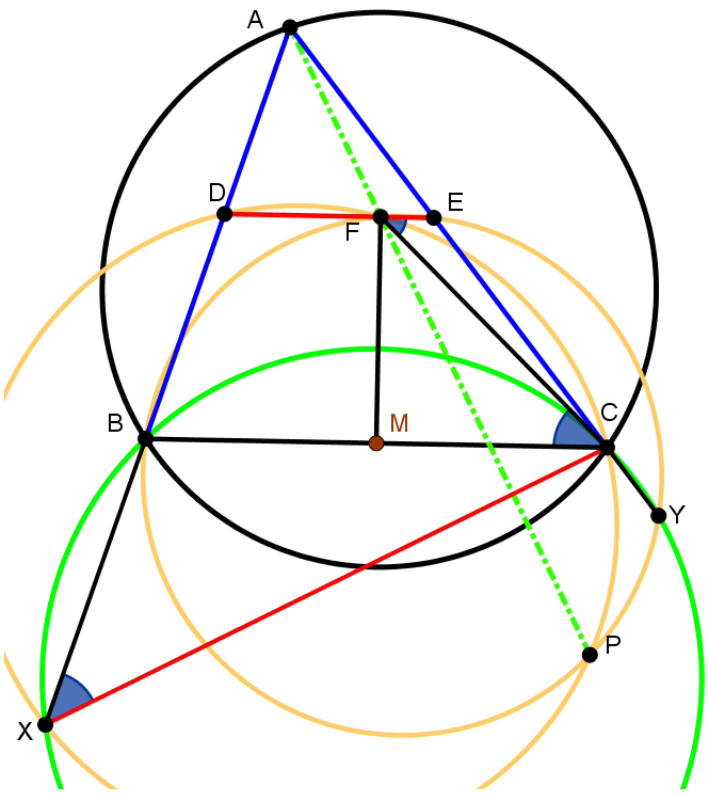
כמו שניתן לראות בציור A, F, P על ישר אחד. נוכיח זאת כעת.

נסמן את נקודת החיתוך השנייה של AB עם המעגל DFC ב-X ואת נקודת החיתוך השנייה של AC עם המעגל EFB נסמן Y. מספיק להוכיח ש-$BXYC$ חסום במעגל ואז מצירים רדיקליים על המעגלים $BXYC, DFC, EFB$ נקבל ש-BX, CY, PF נחתכים בנקודה שהיא בברור A ולכן A, F, P ישר.

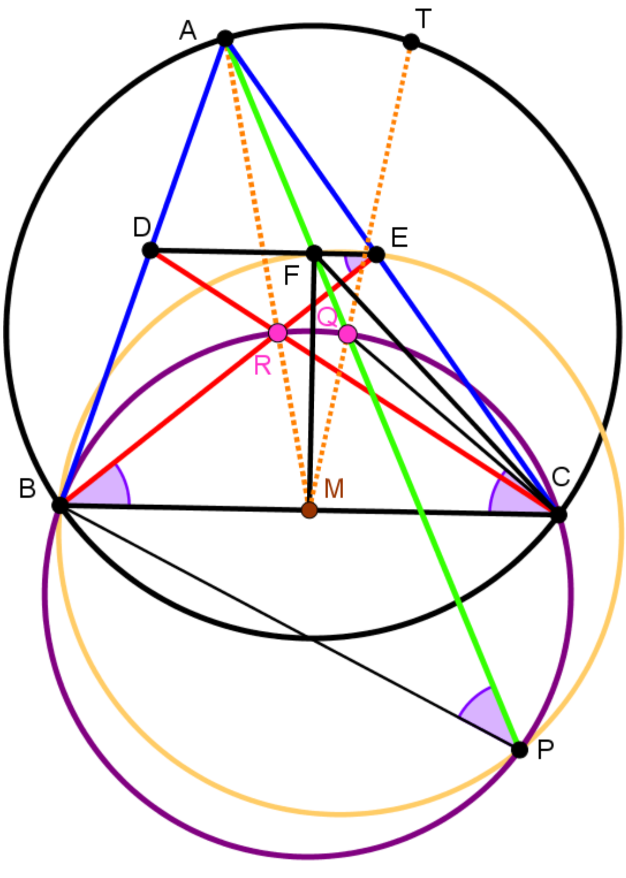
עכשיו נחשבן זוויות:

$$\angle CXB = \angle CXD = \angle CFE = \angle FCB$$

בדיוק באותו אופן נקבל גם ש- $\angle CYB = \angle FBC$ אבל F נמצא על האנך האמצעי של BC ולכן $\angle FBC = \angle FCB$ ולכן הוכחנו את המעגל שרצינו.



נשאר לסיים את השאלה. המתרה שלנו היא להוכיח ש-Q נמצא על TM, נשקף ביחס לאנך האמצעי של BC ונקבל שצריך להוכיח שהשיקוף של Q, נסמן אותו R נמצא על AM.



נחשבן זוויות:

$$\angle QCB = \angle QPB = \angle FPB = \angle FEB = \angle EBC$$

אבל $\angle QCB = \angle RBC$ ולכן B, R, E על ישר
ובאותו אופן גם C, R, F על ישר וממשפט
צ'בה ב-ABC ברור ש-A, R, M על ישר
וניצחנו!

קומבינטוריקה

1. יהיה n מספר טבעי. לוח $n \times n$ הוא ריבוע המורכב מ-n^2 משבצות שכל אחת מהן כחולה או לבנה. לוח נקרא קמור אם לכל משבצת כחולה שתי המשבצות שנמצאות מעליה ומשמאלה גם הן צבועות בכחול. יופי של לוח מוגדר להיות כמות הזוגות של משבצות (w, b) כך ש-w לבנה, b כחולה ו-u, v נמצאות באותה שורה או באותה עמודה.

מצאו את היופי המקסימלי של לוח קמור.

פתרון: נמספר את השורות מלמעלה למטה. נסמן ב-a_i את כמות המשבצות הכחולות בשורה ה-i ולמשבצת הכחולה הימנית ביותר בשורה ה-j נקרא x.

נניח ש-$a_{j+1} < a_j$ כלומר ש- ש-x זו המשבצת הכחולה הנמוכה ביותר בעמודה שלה ונבדוק איך ישתנה היופי אם נצבע את x בלבן.

בשורה של x יהיו $a_j - 1$ זוגות שיהפכו ליפים ו-$n - a_j$ זוגות שיהרסו ולכן יתווספו $2a_j - n - 1$ זוגות יפים בשורה.

בעמודה של x יהיו $j - 1$ זוגות שיהפכו ליפים ו-$n - j$ זוגות שיהרסו ולכן יתווספו $2j - n - 1$ זוגות יפים בשורה.

כלומר סך הכל השינוי ביופי יהיה ב-$2(a_j + j - n - 1)$.

לפיכך נוכל לבצע צביעות מהסוג הנ"ל עד שנגיע למצב שבו $a_j \leq n - j$ ובעצם נוכל לבצע את הצביעות הללו בכל השורות, רק צריך לשמור על הסדר, כלומר כל פעם שיש מספר שורות עם אותה כמות של משבצות כחולות צריך להתחיל בשורה הכי תחתונה מביניהן.

סך הכל קיבלנו שלכל i מתקיים ש-$a_i \leq n - i$.

מצד שני נוכל לבצע את הצביעות ההפוכות, כלומר נוכל לבחור שורה שבה יש פחות משבצות כחולות מהשורה מעליה ולצבוע את המשבצת הלבנה השמאלית ביותר בכחול.

השינוי ביופי בשורה של משבצת זו יהיה $n - 2a_j - 1$ ובעמודה $n - 2j - 1$ ולכן סך הכל השינוי ביופי יהיה $2(n - a_j - j - 1)$ ולכן מאותו שיקול כמו קודם נוכל לצבוע משבצות לבנות עד למצב שבו בכל שורה יתקיים ש-$a_i \geq n - i$.

סך הכל קיבלנו שאפשר מבלי להקטין את יופי הטבלה לעבור למצב שבו בשורה ה-i צבועות בכחול בדיוק $n - i$ משבצות.

קל לראות שבמצב המתואר היופי הכולל של הטבלה הוא

$$2\sum_{i=1}^{n} i\cdot(n-i) = 2\left(\sum_{i=1}^{n} n\cdot i - \sum_{i=1}^{n} i^2\right) =$$
$$= 2\left(n\cdot\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}\right) =$$
$$= 2n\cdot(n+1)\cdot\left(\frac{3n-2n+1}{6}\right) = 2\cdot\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n-1)}{6}$$
$$= 2\cdot\binom{n+1}{3}$$

נזכיר גם את ההסבר הקומבינטורי לזהות $\sum_{i=1}^{n} i\cdot(n-i) = \binom{n+1}{3}$:

אגף ימין בברור מתאר את כמות הדרכים לשים שלושה חציונים בין $n+2$ אנשים כך שבין כל שני אנשים יש חציון אחד לכל היותר.

נספור את כמות הדברים להציב את האסימונים בדרך אחרת, נניח שהאסימון האמצעי הוצב בין האיש ה-$i+1$ ולאיש ה-$i+2$ אז לחציון הראשון נותרו i מקומות ואילו לחציון האחרון נותנו $n-i$ מקומות, נסכום על כל המיקומים של החציון האמצעי ונקבל את הזהות.

2. יהיה n מספר טבעי. לוח $n\times n$ הוא ריבוע המורכב מ-n^2 משבצות שכל אחת מהן כחולה או לבנה. יופי של לוח מוגדר להיות כמות הזוגות של משבצות (w,b) כך ש-w לבנה, b כחולה ול-u,v קודקוד משותף.

מצאו את היופי המקסימלי של לוח קמור.

פתרון ראשון: במקום למקסם את כמות הזוגות בצבעים שונים ננסה להקטין את כמות הזוגות המונוכרומטיים.

נשים לב שאם נצבע את הלוח בצביעת זברה אז בכל שורה יהיו $n-1$ זוגות מונוכרומטיים ולכן סך הכל יהיו $n\cdot(n-1)$ זוגות מונוכרומטיים.

נקרא לזוג משבצות עם צלע משותפת דומינו ולזוג משבצות עם קודקוד משותף נקרא אלכסון.

אנחנו רוצים להוכיח שכמות הדומינויים והאלכסונים המונוכרומטיים היא לפחות $n\cdot(n-1)$.

נשים לב שבכל ריבוע 2×2 יש לפחות שני זוגות מונוכרומטיים ומצד שני כל אלכסון נמצא רק בריבוע 2×2 אחד וכל דומינו נמצא בשני ריבועים 2×2 למעט הדומינומיים בקצה הלוח שנספרים בריבוע 2×2 בודד.

נכסום על כל הריבועים ונקבל ש-

$$\#(\text{אלכסונים מונוכרומטיים}) + \#(\text{דומינויים מונוכרומטיים בקצה}) + 2\#(\text{דומינויים מונוכרומטיים לא בקצה}) \geq 2\#(\text{ריבועי } 2\times 2) = 2(n-1)^2$$

רצינו להוכיח ש-

$$\#(\text{אלכסונים מונוכרומטיים}) + \#(\text{דומינויים מונוכרומטיים בקצה}) + \#(\text{דומינויים מונוכרומטיים לא בקצה}) \geq n(n-1)$$

ולכן מספיק להוכיח ש-

$$\#(\text{אלכסונים מונוכרומטיים}) + \#(\text{דומינויים מונוכרומטיים בקצה}) \geq 2n-2$$

נסתכל על זוג אלכסונים צמודים בריבוע, כלומר כל המשבצות (x,y) כך ש-$x+y=a$ או $x+y=a+1$.

אם כל האלכסונים הקטנים (מגודל 2) המוכלים באלכסונים אלו לא מונוכרומטיים אז אחד משני הדומינויים בקצה הלוח המוכלים בשני האלכסונים חייב להיות מונוכרומטי כי אורכי שני האלכסונים האלו נבדלים באחד ואם כל האלכסונים לא מונוכרומטיים אז באלכסון הזוגי הצבע בקצה האחד שלו שונה מהצבע בקצה השני שלו ובאלכסון האי-זוגי שני קצבותיו צבועים בצבע זהה ולכן לא יתכן ששני הדומינואים הקיצוניים מונוכרומטיים.

נסכום על כל הזוגות של אלכסונים צמודים ונחשב את הסכום

$$\#(\text{אלכסונים מונוכרומטיים}) + \#(\text{דומינויים מונוכרומטיים בקצה})$$

בכל כיוון יש $2n-1$ אלכסונים ולכן בכל כיוון יש $2n-2$ זוגות אלכסונים צמודים ולכן סך הכל יש $4n-4$ זוגות אלכסונים צמודים שכל אחד מהם יש או אלכסון קטן או דומינו קיצוני מונוכרומטי אבל כמובן שכל אלכסון קטן נספר בשני זוגות אלכסונים צמודים וכל דומינו בזוג אחד ולכן סך הכל מקבלים ש-

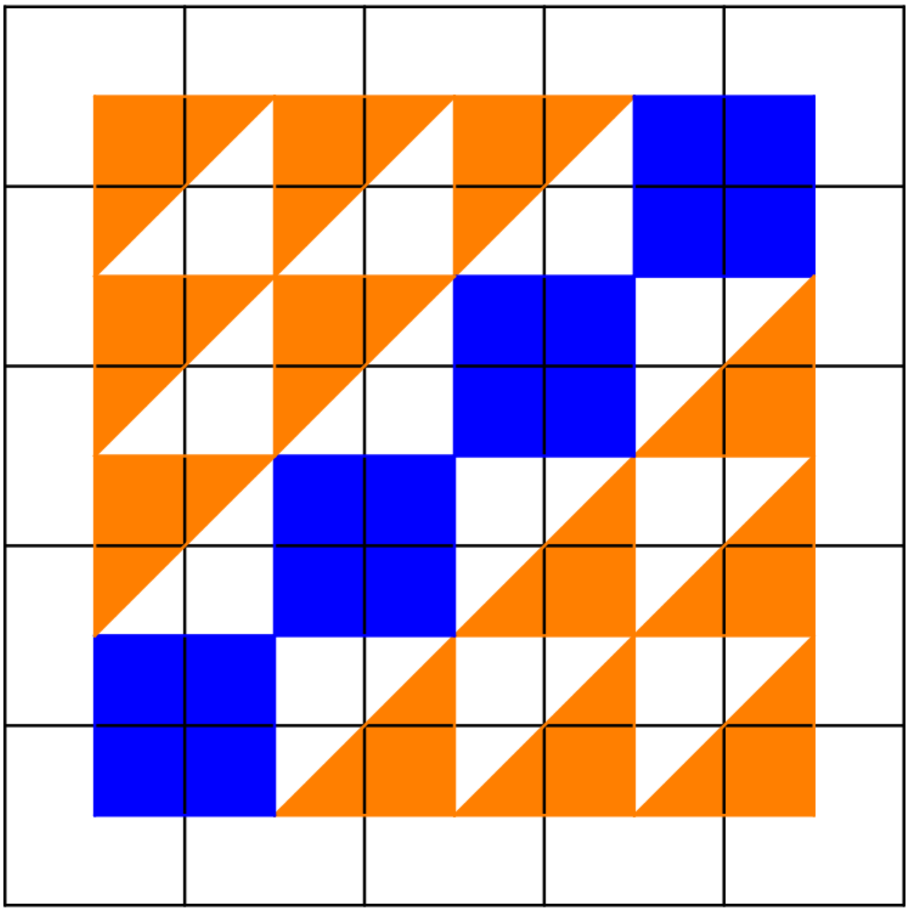
$$\#(\text{אלכסונים מונוכרומטיים}) + \#(\text{דומינויים מונוכרומטיים בקצה}) \geq 2n-2$$

וזה בדיוק מה שרצינו.

פתרון שני: שוב נרצה לחשב את כמות הזוגות המונוכרומטיים.

נשים לב שבכל ריבוע 2×2 יש לפחות שני זוגות מונוכרומטיים ובכל משולש (שלוש משבצות עם קודקוד משותף) יש לפחות זוג מונוכרומטי אחד.

נתבונן בריצוף הבא:



כאמור, בכל משולש כתום יש לפחות זוג אחד ובכל ריבוע כחול לפחות שני זוגות.

יש $(n-1)\cdot(n-2) = 2\cdot\frac{(n-1)(n-2)}{2} = 2\cdot(1+2+3+\ldots+n-2)$

משולשים ועוד $n-1$ ריבועים כחולים שבכל אחד מהם לפחות שני זוגות ולכן סך הכל יש לפחות

$$(n-1)\cdot(n-2)+2(n-1)=(n-1)\cdot(n-2+2)=n\cdot(n-1)$$

ניצחון!

3. במישור עומדים 24 רובוטים נקודתיים, לכל רובוט זווית ראיה של 70^{o}. כל רובוט מאתר את כל הרובוטים הנמצאים בזווית הראייה שלו ומשדר את המספר הזה למעבד הראשי, המעבד הראשי סוכם את כל המספרים ששודרו לו ומדפיס את המספר על דף גדול. מהו המספר הגדול ביותר שיכול להיות מודפס על הדף?

פתרון: ברור שאפשר להניח שאין 3 רובוטים על ישר אחד כי אפשר להזיז את אחד מהם ממש טיפה וזה יכול רק לשפר את המצב.

נקרא לזוג רובוטים מתקשרים אם הם רואים זה את זה.

נשים לב שמבין כל ארבעה רובוטים יש לפחות זוג אחד של רובוטים שלא מתקשרים מכיוון שאחת הזווית במרובע שקודקודיו בארבעת הרובוטים חייבת להיות גדולה מ-90^o.

נבנה גרף שקודקודיו מתאימים לרובוטים ונעביר קשת בין שני קודקודים אם שני הרובוטים מתקשרים. ברור שכל קשת בגרף מוסיפה שתיים לסכום ואילו כל קשת שהיא לא בגרף יכולה להוסיף לסכום אחד לכל היותר לכן הגיוני לנסות למקסם את כמות הקשתות בגרף.

כפי שכבר אמרנו בגרף אין קליקות מגודל 4 ולכן ממשפט טורן הגרף שבו יהיו הכי הרבה צלעות הוא גרף 3-צדדי מאוזן, כלומר צריך לחלק את 24 הקודקודים ל-3 קבוצות של 8 קודקודים כל אחד ולהעביר את כל הקשתות בין שתי קבוצות שונות אבל לא להעביר קשתות בתוך הקבוצות. סך הכל נקבל $(\frac{24}{3})^2 \cdot 3 = 192$.

כבר קיבלנו חסם של $192 * 2 + \frac{24*23}{2} - 192 = 468$.

ומההוכחה ברור איך צריכה להיראות הדוגמה בשביל שחסם זה יהיה הדוק.

המבנה של טורן אומר לנו שצריך למקם את הרובוטים בקודקודים של משולש משוכלל, 8 רובוטים בכל קודקוד כך שכל הרובוטים יראו את 16 הרובוטים בשני הקודקודים האחרים. כמובן שאסור לשים 8 רובוטים באותה נקודה אז נצטרך להזיז מעט את הרובוטים. אבל בנוסף בשביל שהחסם יהיה הדוק צריך שכל הקשתות שלא נמצאות בגרף יתרמו אחד לסכום כלומר לכל שני רובוטים שנמצאים באותו קודקוד אחד מהם צריך לראות את השני. בשביל שדרישה זו תתקיים נשים את שמונת הרובוטים על ישר שמחבר את הקודקוד שלהם עם מרכז המשולש המשוכלל ואז נזיז ממש טיפה לצדדים בשביל שהם לא יסתירו זה את זה, בנוסף נשים לב שאפשר לשים את הרובוטים מספיק על הישר אבל מספיק קרוב לקודקוד כך שהם עדיין יראו את כל מה שקורה בשני הקודקודים האחרים, הרי נתונה לנו זווית ראיה של 70 מעלות וזה הרבה יותר מ-60 מעלות.

תורת מספרים

1. האם קיימים אינסוף זוגות (a,b) של מספרים שלמים חיוביים זרים המקיימים:

$$a+b|a^b+b^a$$

תשובה: כן

פתרון ראשון: נבחר ראשוני אי זוגי $p\equiv 2\ mod\ 3$ ו-$b=4p-1$ $a=2p+1$.

נראה ש-a,b זרים, אכן $\gcd(2p+1,4p-1)=(2p+1,-3)=(4,-3)=1$

$a+b=6p$ ומספיק לבדוק ש-$a^b+b^a\equiv 0$ מודולו $2,3$ ו-p. מודולו 2 ומודולו p זה ברור כי רשום 1 בחזקה אי-זוגית ו--1 בחזקה אי-זוגית.

מודולו 3 זה ברור כי בחרנו $p\equiv 2\ mod\ 3$ ולכן $4p-1\equiv 1\ mod\ 3$

ו-$2p+1\equiv -1\ mod\ 3$ ושוב סכום של 1 ו--1 בחזקות אי זוגיות זה 0.

פתרון שני: $b=2n-1$ $a=2n+1$, ברור שזה זוג מספרים זרים כי ההפרש ביניהם הוא 2 ושניהם אי-זוגיים.

$a+b=4n$, נחשב:

$$\begin{aligned}a^b+b^a&=(2n+1)^{2n-1}+(2n-1)^{2n+1}\\&=(2n+1)\cdot((2n+1)^2)^n+(2n-1)\cdot((2n-1)^2)^{n-1}\\&=(2n+1)\cdot(4n^2+4n+1)^n+(2n-1)\cdot\\&\cdot(4n^4-4n+1)^{n-1}\\&\equiv(2n+1)\cdot(1)^n+(2n-1)\cdot(1)^{n-1}=4n\equiv 0\ mod\ 4n\end{aligned}$$

2. יהיו p ראשוני אי-זוגי. הוכיחו כי עבור כל שלם c קיים מספר שלם a כך שמתקיים

$$a^{\frac{p+1}{2}}+(a+c)^{\frac{p+1}{2}}\equiv c\ mod\ p$$

פתרון: נשים לב שאם $p|c$ אז אפשר לבחור $a=0$ וניצחנו.

עכשיו נשים לב ש-$a^{\frac{p+1}{2}}=a\cdot a^{\frac{p-1}{2}}$ ומקריטריון אוילר אנחנו יודעים ש-$a^{\frac{p-1}{2}}$ שקול ל-1 מוד p אם a זו שארית ריבועית ול--1 כאשר a זו לא שארית ריבועית.

כעט ניתן לשים לב שאם a זו לא שארית ריבועית אבל $a+c$ כן שארית ריבועית אז

$$a^{\frac{p+1}{2}}+(a+c)^{\frac{p+1}{2}}\equiv -a+a+c\equiv c \bmod p$$

ולכן מספיק למצוא a כזה.

נניח בשלילה שלכל a שהוא לא שארית ריבועית $a+c$ גם הוא לא שארית ריבועית אבל אז גם $a+2c$ לא שארית ריבועית ואז גם $a+3c$ וכך האלה, הנחנו ש-c זר ל-p וניתן לבחור את a שגם הוא יהיה זר ל-p ולכן הסדרה $a+kc$ תעבור על כל השאריות מודלו p ונקבל שכל השאריות לא ריבועיות אבל זה שקר ולכן ההנחה הייתה שגויה.

3. תהיה $f:\mathbb{Z}_{>0}\to\mathbb{Z}_{>0}$ לא קבועה המקיימת לכל a,b שלמים חיוביים ש-

$$n-m|f(n)-f(m)$$

הוכיחו שיש אינסוף ראשוניים p עבורם קיים n כך ש- $p|f(n)$.

פתרון ראשון: נניח בשלילה שקבוצת הראשוניים המחלקים את f סופית, נסמן את ראשוניים אלו ב-$p_1,p_2,\ldots$.

נציב $m=1$ ו-$n+1$ במקום n, נקבל ש-

$$n|f(n+1)-f(1)$$

אם נבחר n שמתחלק ב-$f(1)$ נקבל שגם $f(n+1)$ מתחלק ב-$f(1)$. אבל מצד שני אם עבור ראשוני כלשהו p_i מתקיים ש- $v_{p_i}(n)>v_{p_i}(f(1))$ אז צריך להתקיים ש- $v_{p_i}(f(n+1))<v_{p_i}(n)$. נשים לב שם נבחר את n כך שיתקיים ש- $v_{p_i}(n)=v_{p_i}\big(f(1)\big)+1$ אז שני האי-שוויונים יתלקדו ונקבל ש-

$$f(n+1)=f(1)$$

נשים שבטיעון שלנו יכלנו להחליף את $f(n+1)$ ב-$f(cn+1)$ עבור c שלם חיובי והכל היה עובד בדיוק באותה צורה והיינו מקבלים ש-$f(cn+1)=f(1)$.

עכשיו נציב $cn+1$ ב-n ונקבל שלכל m קבוע

$$cn+1-m|f(cn+1)-f(m)=f(1)-f(m)$$

אבל אגף ימין קבוע ואגף שמאל לא חסום כיוון שאפשר להגדיל את c כמה שנרצה ולכן אגף ימין חייב להיות 0, כלומר $f(m)=f(1)$ לכל m בסתירה לכך שהפונקציה לא קבועה.

פתרון שני: ניח בשלילה שקבוצת הראשוניים המחלקים את f סופית, נסמן את ראשוניים אלו ב-... $p_1, p_2,$ ונסמן ... $\cdot$ $\gcd(f(1), f(2), \dots) = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2}$.

ברור שלכל i קיים x_i כך ש-$f(x_i)$ לא מתחלק ב-$p_i^{a_i+1}$.

את הנתון בשאלה ניתן לפרש כך: אם $n \equiv m \ mod\ p$ אז $f(n) \equiv f(m) \ mod\ p$ ולכן לכל $x \equiv x_i \ mod\ p_i^{a_i+1}$ מתקיים ש-$f(x) \nmid p_i^{a_i+1}$ ועכשיו ממשפט השאריות הסיני נקבל שקיים x עבורו $f(x) \nmid p_i^{a_i+1}$ לכל i, ואפילו יותר מזה, קיימת סדרה חשבונית של x-ים כאלו. במילים אחרות קיימים x גדולים ככל שנרצה כך ש-

$$f(x) = \prod_i p_i^{a_i}$$

נבחר y קבוע ונזכר בנתון:

$$x - y | f(x) - f(y) = \prod_i p_i^{a_i} - f(y)$$

אבל אגף ימין קבוע אגף שמאל יכול להיות גדול ככל שנרצה ולכן אגף ימין שווה ל-0 וזו סטירה לכך שהפונקציה לא קבועה.

פתרון שלישי: לפני שנרשום את ההוכחה נציע לקורא לפתור שאלה קצת שונה:

לכל פולינום Q עם מקדים שלמים קבוצת הראשוניים המחלקים את $Q(1), Q(2), Q(3), \dots$ היא אינסופית.

שאלה זו היא בעצם משפט של שור.

הוכחה של משפט שור: אם $Q(0) = 0$ אז הכל ברור כי $n|Q(n)$ ובפרט $p|Q(p)$.

אם $Q(0) = 1$ אז $Q(n) \equiv 1 \ mod\ n$ ואם נבחרת את n להיות $m!$ אז נקבל ש-$Q(m!) \equiv 1 \ mod\ m!$, כלומר $Q(m!)$ לא מתחלק בכל הראשוניים עד m ולכן נקבל ראשוניים גדולים ככל שנרצה ולא יתכן שיש כמות סופית של ראשוניים.

אם $Q(0) \neq 1$ אז נגדיר את הפולינום הבא: $R(n) = \frac{Q(nQ(0))}{Q(0)}$ ברור שזה פולינום עם מקדמים שלמים וברור ש-$R(0) = 1$ וברור גם שכל ראשוני שמחלק את $R(n)$ מחלק גם את $Q(n')$ ומהטיעון עם $m!$ עבור $R(n)$ אנחנו יודעים שיש אינסוף ראשוניים שמחלקים את R ולכן גם אינסוף ראשוניים שמחלקים את Q.

נעבור לפתרון השאלה וננסה לשחזר את ההוכחה של משפט שור.

למען הנוחות נגדיר $g(x) = f(x+1)$, ברור שמתקיים ש-

$$n - m | g(n) - g(m)$$

באופן דומה אם $g(0)=0$ אז $g(n)$ מתחלק ב-n וניצחנו.

אם $g(0)=1$ אז $g(n)\equiv 1 \ mod\ n$ ואם נבחרת את n להיות $m!$ אז נקבל ש-$g(m!)\equiv 1 \ mod\ m!$, כלומר $g(m!)$ לא מתחלק בכל הראשוניים עד m ולכן לא יתכן שיש כמות סופית של ראשוניים.

אם $Q(0)\neq 1$ אז נגדיר $h(n)=\frac{g(ng(0))}{g(0)}$. h מקבלת מספרים שלמים כי $xg(0)|g(xg(0))-g(0)$. בנוסף קל לראות שמתקיים ש-

$$n-m|h(n)-h(m)$$

כי אגף ימין שווה ל-$\frac{g(ng(0))-g(mg(0))}{g(0)}$ והמונה מתחלק ב-$g(0)(n-m)$.

בנוסף ברור ש-$h(0)=1$ וברור גם שכל ראשוני שמחלק את $h(n)$ מחלק גם את $g(n')$ ומהטיעון עם $m!$ עבור $h(n)$ אנחנו יודעים שיש אינסוף ראשוניים שמחלקים את h ולכן גם אינסוף ראשוניים שמחלקים את g וכך גם את f.

4. יהיה k שלם חיובי. הוכיחו שאם קיימת סדרה של מספרים שלמים המקיימת את תנאי הנסיגה:

$$a_n=\frac{a_{n-1}+n^k}{n}$$

אז $k-2$ מתחלק ב-3.

פתרון ראשון: נפתח את נוסחת הנסיגה ונקבל

$$a_n=\frac{\frac{a_{n-2}+(n-1)^k}{n-1}+n^k}{n}=\frac{\frac{a_{n-3}+(n-2)^k}{n-2}+(n-1)^k+(n-1)n^k}{n(n-1)}$$
$$=\ldots=\frac{n^k(n-1)!+(n-1)^k(n-2)!+\ldots+1\cdot 0!+a_0}{n!}$$

נסמן $S_k(n)=\sum_{i=1}^{n} i^k(i-1)!$ ולכן בכדי ש-a_n יהיה שלם צריך להתקיים ש-$S_k(n)\equiv -a_0 \ \ mod\ n!$.

נחשב את $S_{k+1}(n)$ מודולו $n!$ כתלות ב-$S_j(n)$ עבור $j\leq k$:

$$\begin{aligned} S_{k+1}(n) = \sum_{i=1}^{n} i^{k+1}(i-1)! &= n^{k+1}(n-1)! + \sum_{i=1}^{n-1} i^{k+1}(i-1)! \\ &\equiv \sum_{i=1}^{n-1} i^{k+1}(i-1)! = \sum_{i=1}^{n-1} i^{k} i! = \sum_{i=2}^{n}(i-1)^{k}(i-1)! \\ &= \sum_{i=1}^{n}(i-1)^{k}(i-1)! = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} i^{j}(-1)^{k-j}\right](i-1)! \\ &= \sum_{j=0}^{k}\sum_{i=1}^{n}\binom{k}{j} i^{j}(-1)^{k-j}\,(i-1)! = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}S_j(n) \end{aligned}$$

כמובן שאפשר לפתוח את הנוסחה הרקורסיבית ולקבל ש-

$$S_{k+1}(n) \equiv c_{k+1}S_0(n) + b_{k+1} \ mod\ n!$$

כאשר c_k, b_k מספרים שלמים, קל גם למצוא נוסחה רקורסיבית ל-c_k, b_k:

$$c_{k+1} = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}c_j \qquad b_{k+1} = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}b_j$$

ואת תנאי ההתחלה קל לקבל מהנוסחה עבור $S_1(n)$:

$$S_0(n) = 0! + 1! + \cdots + (n-1)!$$

$$\begin{aligned} S_1(n) &= 1\cdot 0! + 2\cdot 1! + \ldots + (n-1)\cdot(n-2)! + n\cdot(n-1)! \\ &\equiv 1! + 2! + \ldots + (n-1)! \equiv S_0(n) - 1 \ \ mod\ n! \end{aligned}$$

ולכן $c_1 = 1$ ו-$b_1 = -1$ וברור ש-$c_0 = 1$ ו-$b_0 = 0$.

נחזור לנוסחה $S_{k+1}(n) \equiv c_{k+1}S_0(n) + b_{k+1}\ mod\ n!$ ונזכר שבשביל שתהיה סדרה כמבוקש בשאלה צריך להתקיים $S_k(n) \equiv -a_0 \ \ mod\ n!$ כלומר סך הכל אנחנו דורשים שיתקיים ש-

$$n! \mid c_k S_0(n) + b_k + a_0$$

קל לראות שאם $c_k \neq 0$ אז זה לא אפשרי, אכן עבור n-ים גדולים מספיק מתקיים

$$c_k S_0(n) + b_k + a_0 < 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + (n-1)\cdot(n-1)! = n! - 1$$

ולכן זה לא מתחלק. כלומר מספיק לנו להוכיח ש-c_k שונה מ-0 כאשר $k \not\equiv 2\ mod\ 3$.

אנחנו נוכיח ש-c_k אי-זוגי כאשר $k \not\equiv 2\ mod\ 3$ ובפרט זה יסיים.

נסתכל על נוסחת הנסיגה של c_k מודולו 2:

$$c_{k+1} \equiv \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} c_j \; mod \; 2$$

נזכר גם ש-$c_0 = 1, c_1 = 1$ ולכן $c_2 \equiv \binom{1}{0} + \binom{1}{1} \equiv 0 \; mod \; 2$.

מפה קל לסיים באינדוקציה: נוכיח ש-c_k זוגי אם ורק אם $3|k-2$, את הבסיס הרגע בדקנו, נעשה את הצעד:

$$c_{k+1} \equiv \sum_{j \not\equiv 2 \; mod \; 3}^{k} \binom{k}{j} = \omega^2 \cdot (1+\omega^2)^k - \omega \cdot (1+\omega)^k$$
$$\equiv \omega^{k+2} + \omega^{2k+1} \; mod \; 2$$

ועכשיו ברור שאם $k \equiv 1 \; mod \; 3$ אז הביטוי זוגי ואחרת אי זוגי.

פתרון שני: "נחליף" את הסדרה בפולינום.

נניח כי קיימת סדרה כנדרש בשאלה.

טענה: קיים פולינום עם מקדמים שלמים המקיים ש-$P(n) = a_n$

ו-$xP(x) = x^k + P(x-1)$.

הוכחה: נבנה פולינום P ממעלה $k-1$, נסמן

$$P(x) = b_{k-1}x^{k-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

מהנוסחה $xP(x) = x^k + P(x-1)$ נובע שצריך להתקיים ש-$b_{k-1} = 1$, עכשיו אפשר לחשב את b_{k-2} וניתן להמשיך כך ולהביע את כל אחד מה-b-ים כתלות ב-b-ים הקודמים ונקבל שכל המקדמים מסתדרים חוץ מאולי המקדם החופשי, כלומר קל מאוד למצוא פולינום שמקיים את הנוסחה:

$$xP(x) = x^k + P(x-1) + c$$

אנחנו נוכיח ש-$c = 0$.

נגדיר $d_n = a_n - P(n)$, אנו מקבלים ש-

$$P(n) + d_n = \frac{P(n-1) + d_{n-1} + n^k}{n}$$

כלומר

$$\frac{nP(n) - P(n-1) - n^k}{n} + d_n = \frac{d_{n-1}}{n}$$

ולכן

$$d_n = \frac{d_{n-1}}{n} - c$$

נפתח את נוסחת הנסיגה ונקבל

$$d_n = \frac{d_0}{n!} - c \cdot \frac{0! + 1! + \ldots (n-1)!}{n!}$$

בדיוק כמו בפתרון הקודם נקבל שעבור n-ים גדולים $0! + 1! + \ldots (n-1)!$ לא מתחלק ב-$n!$ ולכן c חייב להיות 0 ולכן גם $P(n) = a_n$.

עכשיו נוכיח שאם קיים פולינום המקיים את הזהות $xP(x) = x^k + P(x-1)$ אז $k \equiv 2 \ mod\ 3$.

נסתכל על $\mathbb{F}_4$, השדה עם ארבעה איברים, נקרא להם $0,1,z,z+1$.

נציב את z בזהות ונקבל ש-

$$zP(z) = z^k + P(z-1) = z^k + P(z+1)$$

נציב את $z+1$ בזהות ונקבל ש-

$$(z+1)P(z+1) = (z+1)^k + P(z)$$

מכאן נובע ש-

$$P(z) = z \cdot (z+1) \cdot P(z) = (z+1) \cdot \left(z^k + P(z+1)\right)$$
$$= (z+1)z^k + (z+1)^k + P(z)$$

ולכן

$$z^k + (z+1)^{k-1} = 0$$

ולכן $k, k-1$ לא מתחלקים ב-3 וזה בדיוק מה שרצינו.