

תרגיל מינק מחודש ראשון!

מותר להגיש עד ל-17.8.2020

אלגברה

1. פתרו ברציונליים $x^2 + xy + y^2 = 50$.

2. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{R}^{>0} \rightarrow \mathbb{R}^{>0}$ כך שלכל x, y ממשיים חיוביים מתקיים:

$$f(x)f(y) = 2f(x + yf(x)) \quad \forall x, y > 0$$

3. יהי n שלם גדול מ-1. שני פולינומים P, Q יקראו דמי-בלוקים אם לכל

$$i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$P(2015i), P(2015i - 1), \dots, P(2015i - 2014)$$

$$Q(2015i), Q(2015i - 1), \dots, Q(2015i - 2014)$$

הן תמורות זו של זו.

א. הוכיחו כי קיימים שני פולינומים שונים P, Q ממעלה $n + 1$ שהם דמי בלוקים.

ב. הוכיחו כי לא קיימים שני פולינומים שונים P, Q ממעלה n שהם דמי בלוקים.

גיאומטריה

1. נתון משולש ישר זווית ABC , הזווית $\angle A$ ישרה. M, N הן אמצעי הצלעות BC, AB בהתאמה. המעגל החסום מבחוץ במשולש ACM משיק לצלע CM בנקודה D ולהמשך הצלע AC בנקודה E . הוכיחו כי הנקודות D, E, N נמצאות על ישר אחד.

2. נתון משולש ABC . המשיק בנקודה A למעגל החוסם של המשולש חותך את הגובה מ- C בנקודה P . חוצה הזווית של $\angle A$ חותך את הצלע BC בנקודה D . הקטע PD חותך את הצלע AB בנקודה K . מפגש הגבהים במשולש יסומן H . הוכיחו כי $KH \perp AD$.

3. נתון משולש ABC ו- M היא אמצע BC . נתון ישר l המקביל ל- BC . נקודות החיתוך של l עם הצלעות AB, AC יסומנו D, E בהתאמה. O הוא מרכז המעגל החוסם של ABC ו- F זו ההטלה של O על l . המעגלים החוסמים של DFC ו- EFB נחתכים שנית בנקודה P . תהיה P' הנקודה הצמודה איזוגונלית ל- P ביחס ל- ABC . הוכיחו כי A, O, M, P' נמצאות על מעגל אחד.

קומבינטוריקה

1. יהיה n מספר טבעי. לוח $n \times n$ הוא ריבוע המורכב מ- n^2 משבצות שכל אחת מהן כחולה או לבנה. לוח נקרא קמור אם לכל משבצת כחולה שתי המשבצות שנמצאות מעליה ומשמאלה גם הן צבועות בכחול. יופי של לוח מוגדר להיות כמות הזוגות של משבצות (w, b) כך ש- w לבנה, b כחולה ו- v, w נמצאות באותה שורה או באותה עמודה.

מצאו את היופי המקסימלי של לוח קמור.

2. במישור עומדים 24 רובוטים נקודתיים, לכל רובוט זווית ראייה של 70° . כל רובוט מאתר את כל הרובוטים הנמצאים בזווית הראייה שלו ומשדר את המספר הזה למעבד הראשי, המעבד הראשי סוכם את כל המספרים ששודרו לו ומדפיס את המספר על דף גדול. מהו המספר הגדול ביותר שיכול להיות מודפס על הדף?

3. יהיה n מספר טבעי. לוח $n \times n$ הוא ריבוע המורכב מ- n^2 משבצות שכל אחת מהן כחולה או לבנה. מגניבות של לוח מוגדרת להיות כמות הזוגות של משבצות (w, b) כך ש- w לבנה, b כחולה ול- v, w קודקוד משותף.

מצאו את לוח מגניב ביותר כלומר את הערך המקסימלי של מגניבות של לוח.

תורת מספרים

1. האם קיימים אינסוף זוגות (a, b) של מספרים שלמים זרים גדולים מ-1 המקיימים:

$$a + b \mid a^b + b^a$$

2. יהי p ראשוני אי-זוגי. הוכיחו כי עבור כל שלם c קיים מספר שלם a כך שמתקיים

$$a^{\frac{p+1}{2}} + (a+c)^{\frac{p+1}{2}} \equiv c \pmod{p}$$

3. תהיה $f: \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ לא קבועה המקיימת לכל n, m שלמים חיוביים ש-

$$n - m \mid f(n) - f(m)$$

הוכיחו שיש אינסוף ראשוניים p עבורם קיים n כך ש- $p \mid f(n)$.

4. יהי k שלם חיובי. הוכיחו שאם קיימת סדרה של מספרים שלמים המקיימת את תנאי הנסיגה:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + n^k}{n}$$

אז $k - 2$ מתחלק ב-3.