

שאלת שאלה

משולש ABC חסום במעגל שמרכזו O.
ולוקחים בו את אמצעי הקשתות BC, AC, AB, ונסמן אותם ב-M, N, P בהתאמה.
הישרים AO, BO, CO חותכים את NP, MN, MP בנקודות X, Y, Z בהתאמה.
נסמן ב-I את מרכז המעגל החסום ב-ABC,
ב-G את נקודת ז'רגון של ABC,
וב-L את נקודת חיתוך התיכושקים של ABC.

הוכיחו כי הישרים GI, OL, PZ, NY, MX נפגשים בנקודה.

פרק ראשון - יישוב יחסים

1. היזכרו במשפט צ'בה
2. הוכיחו כי MX, NY, PZ נפגשים בנקודה.

פרק ראשון עוד פעם - אלימות אליפסות

1. היזכרו בנקודת ז'רגון,
ואז נסחו שאלה דומה עבור אליפסה חסומה במקום מעגל,
ואז הוכיחו אותה.
2. הוכיחו כי MX, NY, PZ נפגשים בנקודה.

נסמן את חיתוך שלושת הישרים הנ"ל ב-K.

פרק ראשון וחצי - לומדים לעשות למואן

- יהי ABC משולש. נסמן ב-O את מרכז המעגל החוסם. נצייר את שלושת המשיקים מקודקודי המשולש למעגל החוסם. הם מייצרים את המשולש $A_0B_0C_0$. הישרים A_0B_0 ו- AB נחתכים בנקודה A_1 . באופן דומה נגדיר B_1C_1 .
נסמן ב-L את חיתוך הישרים AA_0, BB_0, CC_0 .
הסתכלו על מעגל עם מרכז ב- A_1 שעובר ב-A, ומעגל עם מרכז ב- B_1 שעובר ב-B.
1. הוכיחו כי O נמצא על הציר הרדיקלי של שני המעגלים הנ"ל.
2. הוכיחו כי גם L נמצא עליו.
3. הסיקו כי הנקודות A_1, B_1, C_1 על ישר, ושהוא מאונך ל-LO.

פרק שני - דורבן דואליות

- נחתוך את המשיקים למעגל החוסם מהנקודות N, P , ונסמן את החיתוך ב- M_0 . נסמן את N_0, P_0 בצדדים האחרים בהתאמה.
1. הראו כי המשולש ABC דומה למשולש M_0, N_0, P_0 .
 2. נתבונן בהעתקה שהיא דואליות ביחס למעגל החוסם של ABC . הבינו מה הישר הדואלי לנקודה L .
 3. הבינו מה הישר הדואלי לנקודה X .
 4. הבינו מה הישר הדואלי לנקודה K .
 5. הוכיחו כי הישרים הדואליים ל- L ול- K מקבילים, והסיקו כי O, K, L ישר.

פרק שלישי - אינוורסיה אמפירית

1. הוכיחו כי XI מאונך ל- BC .
2. המעגל BIC חותך את XI שנית בנקודה X_0 . (נגדיר Y_0, Z_0 באופן דומה)
הראו כי המעגלים החוסמים של המשולשים A_0IX, B_0IY, C_0IZ נפגשים בנקודה (שהיא לא I). נסמן את הנקודה הזאת ב- K_0 .
3. הוכיחו את זה שוב, אבל הפעם בלי להשתמש בפרקים הקודמים.
4. נסמן את נקודות ההשקה של המשולש ABC עם המעגל החוסם ב- D, E, F .
שימו לב כי G זו נקודת למואן של משולש DEF , וחייכו.
5. הראו כי DEF דומה ל- MNP .
6. הראו כי IG מאונך לישר שעובר במרכזי שלושת המעגלים AIX_0, BIY_0, CIZ_0 .
7. השלימו את סוף ההוכחה.

הסוף!