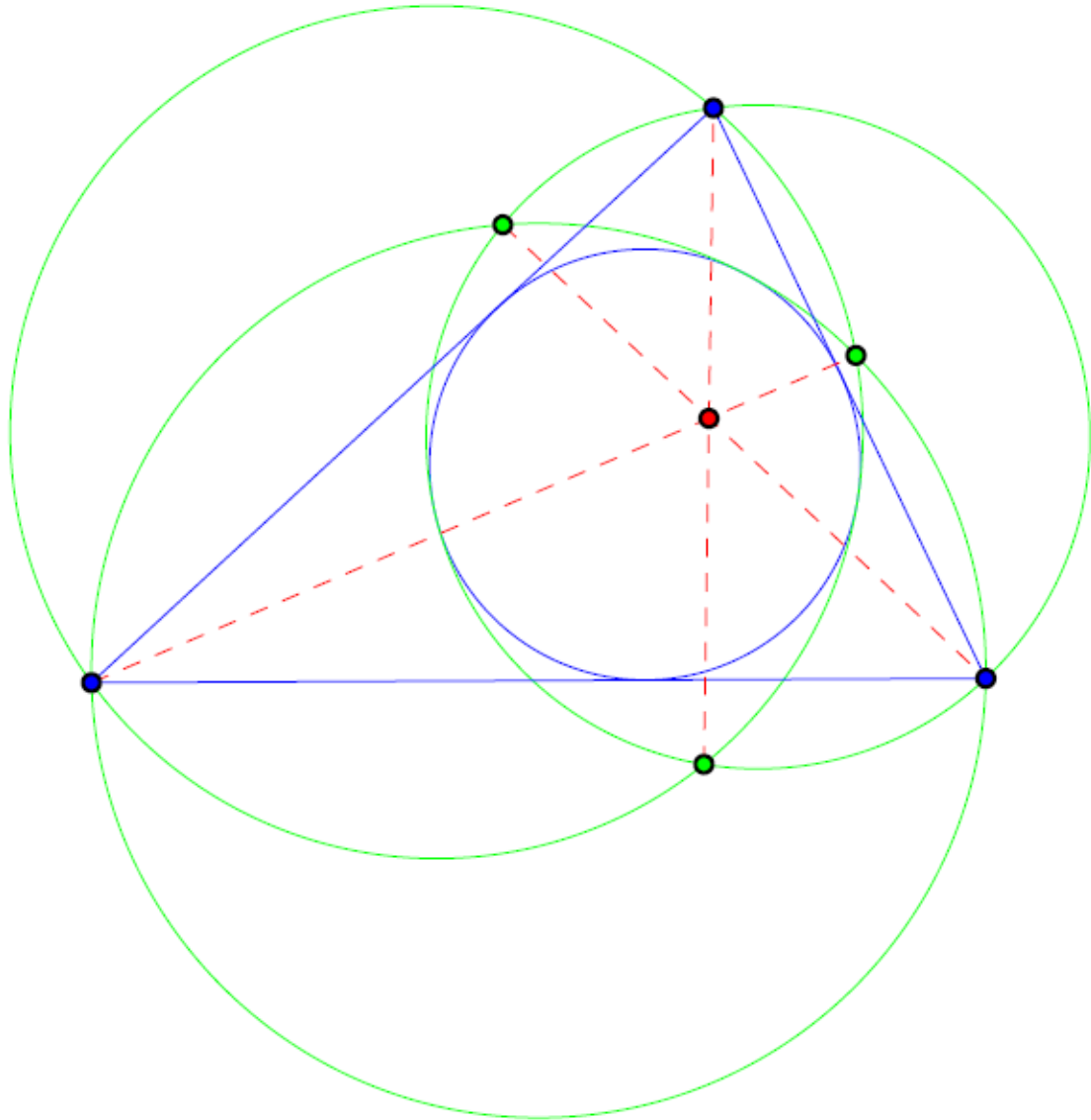


התוכנית היא לפתור את השאלה של פיודור איבלב:

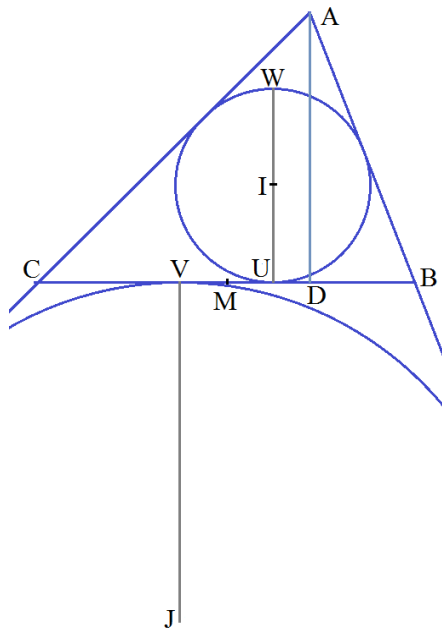


במשולש ABC המעגל החסום הוא ω ומרכזו I; מרכז המעגל החסום הוא O. מעבירים מעגלים (ירוקים בציור) $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ שכל אחד מהם עובר דרך שני קודקודים ומשיק למעגל ω . הוכח כי שלושת המיתרים המשותפים של זוגות מעגלים מבין $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ וגם הישר OI נפגשים. (לשם קיצור נגיד שמספר קווים נפגשים, כאשר הכוונה היא שהם נפגשים בנקודה אחת).

שאלה זו הופיעה בתחרות Romanian Master of Mathematics and Sciences.

אנחנו נעבור על פתרון בשלבים, כאשר לכל שלב יש הוכחה גיאומטרית פשוטה יחסית.

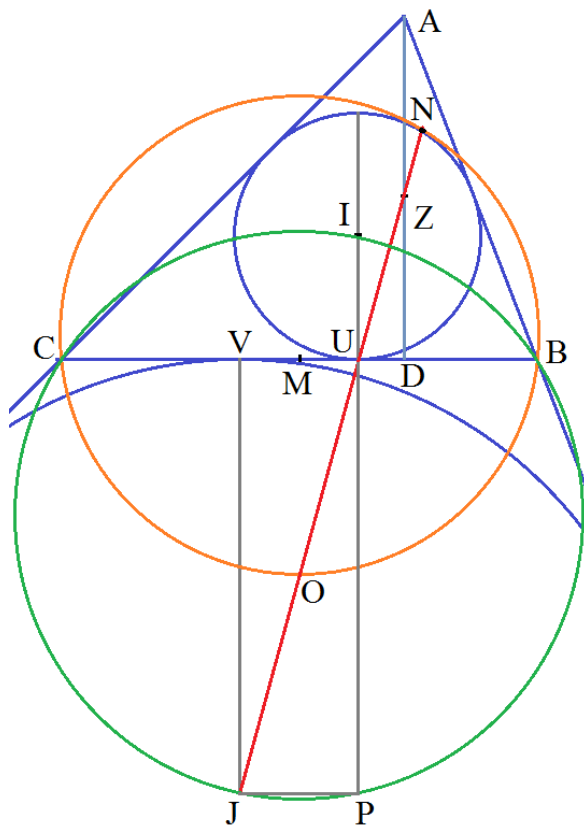
סוגיה ראשונה: תכונות בסיסיות של מעגלים חסומים



במשולש ABC המעגל החסום שמרכזו I משיק לצלע BC בנקודה U, והמעגל החסום מבחוץ לצלע BC שמרכזו J משיק לצלע BC בנקודה V. בנוסף, נניח כי M היא אמצע BC, AD הוא גובה, ו-UW הוא קוטר של המעגל החסום.

1. הוכח כי AWW ישר.
2. תהי X היא נקודת חיתוך של MI ו-AD. הוכח כי AX שווה לרדיוס המעגל החסום.
3. הוכח כי JU, IV נפגשים באמצע של AD.

Shortlist 2002 שאלה מ- סוגיה שנייה: שאלה מ- Shortlist 2002



בסימונים של הסוגיה הקודמת, תהי Z אמצע הגובה AD. הישר UZ חותך את המעגל החסום שנית בנקודה N (בנוסף ל-U).

VUPI הוא מלבן שמרכזו O.

המטרה של סוגיה זו היא להבין שהמעגל BNC משיק למעגל החסום.

4. הוכח כי $BU \cdot UC = IU \cdot UP$.
5. הוכח כי $IU \cdot UP = OU \cdot UN$.
6. הוכח כי O נמצאת על מעגל BCN (וחוצה את הקשת BC).
7. הוכח כי N היא נקודת ההשקה של המעגל החסום והמעגל NBC.

סוגיה שלישית: פתרון השאלה המקורית

נשתמש בסימונים השונים מהסוגיות הקודמות. ABC עדיין משולש, O ו- I מרכזי המעגל החסום והחוסם, המעגלים $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ משיקים למעגל החסום וכל אחד מהם עובר דרך שני הקצוות של צלע מתאימה. המעגלים ω_b, ω_c נחתכים בשתי נקודות: A ו- A' . המטרה היא להוכיח כי AA', BB', CC', IO נפגשים.

נסמן את נקודות השקה המתאימות של $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ עם המעגל החסום ב- A'', B'', C'' . נסמן ב- T_a, T_b, T_c את נקודות ההשקה של המעגל החסום עם הצלעות. נסמן ב- P_a את אמצע הקשת BC של מעגל ω_a (כמו הנקודה O של הסוגיה השנייה), ובאופן דומה נגדיר P_b ו- P_c . נסמן גם ב- I_a, I_b, I_c את מרכזי המעגלים החסומים מבחוץ.

8. (תזכורת) הוכח כי A'', T_a, P_a, I_a ו- A גובה מ- A על ישר אחד.

ישר זה יסומן l_a , ובאופן דומה מוגדרים l_b, l_c .

9. הוכח כי המשולשים $P_a P_b P_c$ ו- $T_a T_b T_c$ הומוטטיים.

10. הוכח כי l_a, l_b, l_c נפגשים.

11. הוכח כי O הוא מרכז המעגל החוסם של $P_a P_b P_c$.

12. הוכח כי הישרים IO, l_a, l_b, l_c נפגשים.

13. הוכח כי CC', l_a, l_b נפגשים.

14. הוכח את הטענה שנוסחה בתחילת התרגיל.