סדרות

1. סדרת המספרים מוגדרת על ידי $a_0=-1$, ונוסחת הנסיגה $\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{n-k}}{k+1}=0$, לכל $n\ge 1$. הראו כי $a_n\ge 0$ לכל $n\ge 1$.

2. מספרים חיוביים $a_1,a_2,...$ מקיימים $a_{k+1}\ge \frac{ka_k}{a_k^2+k-1}$ לכל k. הראו כי

$$a_1+a_2+...+a_n\ge n.$$

3. הסדרה $\left(a_n\right)_{n\ge 1}$ מוגדרת על ידי $a_1=1,\ \ a_2=2,\ \ a_3=24$ ולכל $n\ge 4$

$$a_n=\frac{6a_{n-1}^2a_{n-3}-8a_{n-1}a_{n-2}^2}{a_{n-2}a_{n-3}}.$$

הראו כי לכל n, המספר a_n הוא שלם ומתחלק ב-n.

4. נגדיר סדרה $a_1=4$ ובנוסף $a_{n+1}=a_n^2-2$. הראו שלכל n קיים משולש שצלעותיו הם a_n-1,a_n,a_n+1 ושטחו שלם. האם יש עוד ערכים של a טבעי עבורם למשולש שצלעותיו הם $a-1,a,a+1$ יש שטח שלם.

5. נגדיר $Q_0(x)=1$, $Q_1(x)=x$ ובנוסף $Q_n(x)=\frac{\left(Q_{n-1}(x)\right)^2-1}{Q_{n-2}(x)}$ ולכל $n\ge 2$. הראו כי Q_n הוא פולינום עם מקדמים שלמים לכל n.

6. נגדיר $a_0=1$, $a_1=2$, וגם $a_n=4a_{n-1}-a_{n-2}$ לכל $n\ge 2$. מצאו גורם ראשוני אי-זוגי של a_{2015}.

7. נגדיר $a_0=\frac{5}{2}$, וגם $a_k=a_{k-1}^2-2$ לכל $k\ge 1$. מצאו ביטוי קצר ל-$\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{a_k}\right)$.

8. פונקציה $f:(0,1)\to(0,1)$ מוגדרת ע"י $f(x)=\begin{cases} x+\frac{1}{2} & x<\frac{1}{2} \\ x^2 & x\ge \frac{1}{2}\end{cases}$.
מספרים a ו-b מקיימים $0<a<b<1$. נגדיר סדרות a_n ו-b_n ע"י $a_0=a,\ b_0=b$ ונסיגה $a_n=f\left(a_{n-1}\right),\ b_n=f\left(b_{n-1}\right)$ לכל $n>0$. הראו שקיים $n>0$ עבורו

$$\left(a_n-a_{n-1}\right)\left(b_n-b_{n-1}\right)<0.$$

9. נגדיר סדרה באמצעות $u_1=2$, $u_2=u_3=7$ ונוסחת נסיגה $u_{n+1}=u_nu_{n-1}-u_{n-2}$. הראו כי לכל n, המספר u_n נבדל ב-2 מריבוע שלם.

10. נגדיר סדרה ע"י $a_1=\frac{1}{2}$ ונסיגה $a_{n+1}=\frac{na_n^2}{1+(n+1)a_n}$ לכל $n\ge 1$. חשבו את $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}$.

בתאבון!