תרגיל אלגברי

1. נקודות שונות A, B, C ו- D נמצאות על מעגל שרדיוסו 1 ומרכזו בראשית הצירים. הנקודות מיוצגות על ידי מספרים מרוכבים a, b, c ו- d. הראו שהמיתרים AC ו-BD נחתכים בתוך העיגול אך ורק כאשר $|ac-bd|>|a+c-b-d|$.

2. נתון פולינום מתוקן $p(x)$ ממעלה 3 שהשורשים שלו הם a,b,c. הראו כי

$$p(1)\cdot p(0)\cdot p(-1)=\left(a-a^3\right)\left(b-b^3\right)\left(c-c^3\right)$$

3. עבור מספרים ממשיים כלשהם $x_1\ge x_2\ge\ldots\ge x_{2n}$ הוכיחו את האי-שוויון:

$$\left(x_1+x_2+\ldots+x_{2n}\right)^2\ge 4n\left(x_1x_{n+1}+x_2x_{n+2}+\ldots+x_nx_{2n}\right)$$

4. א. עבור אילו רביעיות של מספרים ממשיים a_1,a_2,b_1,b_2, לכל x ממשי מתקיים אי-השוויון $\left(x-a_1\right)\left(x-a_2\right)<\left(x-b_1\right)\left(x-b_2\right)$?

ב. עבור אילו שלשות של מספרים ממשיים a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3, לכל x ממשי מתקיים אי-השוויון $\left(x-a_1\right)\left(x-a_2\right)\left(x-a_3\right)<\left(x-b_1\right)\left(x-b_2\right)\left(x-b_3\right)$?

5. מספרים חיוביים $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n,b_1,b_2,b_3,\ldots,b_n$ מקיימים $a_i<b_j$ לכל i ו- j. הוכיחו כי

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2+a_ib_i+b_i^2}{3n}}\ge\sqrt[3]{\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\cdot\frac{a_i+b_i}{2n}}.$$

6. המספרים הממשיים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3$ מקיימים: $\beta_1\beta_2\beta_3=2$, $\alpha_1\alpha_2\alpha_3=1$, ואת אי-השוויון

$$\beta_1+\beta_2+\beta_3-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3>\left(\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_2}+\frac{1}{\beta_3}-\frac{1}{2\alpha_1}-\frac{1}{2\alpha_2}-\frac{1}{2\alpha_3}\right)^2$$

תומר רושם על הלוח את כל 9 הטענות מסוג $\alpha_i<\beta_j$. הוכיחו כי כמות הטענות השגויות אצל תומר היא ריבוע זוגי.

7. על הלוח כתובה המשוואה

$$\left(x-1\right)\left(x-2\right)\cdot\ldots\cdot\left(x-2016\right)=\left(x-1\right)\left(x-2\right)\cdot\ldots\cdot\left(x-2016\right)$$

בה 2016 גורמים לינאריים בכל אגף. מהוא הערך המינימלי האפשרי של k עבורו ניתן למחוק k מתוך 4032 הגורמים הליניאריים הללו, כך שבכל אגף ישאר לפחות גורם אחת, ולמשוואה המתקבלת לא יהיו פתרונות ממשיים?

8. נתונים 6 מספרים חיוביים שונים: a,b,c,M,N,K. מה יותר גדול:

$$\left(\frac{M\left(a^2+ab+b^2\right)+N\left(a^2+ac+c^2\right)+K\left(b^2+bc+c^2\right)}{3\left(M+N+K\right)}\right)^3$$ או

$$\left(\frac{M\cdot ab\left(a+b\right)+N\cdot ac\left(a+c\right)+K\cdot bc\left(b+c\right)}{2\left(M+N+K\right)}\right)^2$$?