

## תרגיל פולינומי

1. הראו כי לפולינום  $1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} = n^2$  יש שורש רציונלי.

2. פולינום ממעלה 2019 מקיים  $P(n) = \frac{1}{n^2}$  כאשר  $n = 1, 2, 3, \dots, 2020$ .

מצאו את  $P(2021)$ .

3. מצאו את כל הזוגות של פולינומים  $P, Q$  עם מקדמים רציונליים שמקיימים

$$P^3 + Q^3 = x^{12} + 1$$

4. הוכיחו כי הפולינום  $x^{3072} + 5779x^{1024} + 2018$  אי פריק מעל שלמים.

5. לכל פולינום  $f$  במקדמים שלמים נגדיר  $f_n(x) := f(\overset{n}{f(\dots f(x)\dots)})$  כאשר  $f$  מופיע  $n$  פעמים. תארו את כל הפולינומים  $f$  עבורם  $n \mid f_n(x) - x$  לכל  $n$  טבעי ולכל  $x$  שלם.

6. מקדמים של פולינומים  $p(x)$  ו- $q(x)$  לא שליליים, והמקדמים המובילים שווים ל-1. נניח כי  $p(x) \cdot q(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^k$ . הראו כי כל אחד מהמקדמים של שני הפולינומים שווים ל-0 או ל-1.

7. הראו שהפולינום  $x^n + x^{n-1} + \dots + x - 1$  אי-פריק מעל שלמים.

8. נתון מספר מרוכב  $A$ , מספר טבעי  $d$ , ומספר חיובי  $q$  המקיימים  $|A|^2 = \frac{1}{q^d}$ . הראו

ששורשי הפולינום  $A(x^d - x^{d-1}) - \frac{x}{q} + 1 = 0$  נמצאים על מעגל אחד במישור המרוכב.

**בתאבון!**