

תרגיל פולינומי

1. פולינום נקרא מגניב אם סכום המקדמים של הדרגות הזוגיות שווה לסכום המקדמים של הדרגות האי-זוגיות. האם מכפלה של פולינום מגניב בפולינום אחר זה בהכרח פולינום מגניב?
2. האם הפולינום $x^{2021} + x^{200} + 2x^{72} - 5$ מתחלק בפולינום
- א. $x^7 + x^3 - 2$
ב. $x^2 + x + 1$
ג. $x^3 + x + 3$
3. יהי f פולינום ריבועי. הוכיחו ש- $f(x) \cdot f(x+1)$ הוא הרכבה של שני פולינומים ריבועיים.
4. מצאו את כל הפולינומים עם מקדמים ± 1 שכל השורשים שלהם ממשיים.
5. נתון הפולינום $x^8 + x^7$. גוזרים אותו ומכפילים אותו ב- $(x+1)$ בסדר כלשהו כמות כלשהי של פעמים, עד שמתקבל פולינום לינארי $ax + b$. הראו כי $a - b$ מתחלק ב-49.
6. יהי P פולינום עם מקדמים ממשיים כך ש- $P(\cos \alpha) = P(\sin \alpha)$. הראו כי קיים פולינום Q כך ש-
 $P(x) = Q(x^4 - x^2)$
7. האם קיים פולינום P מדרגה 5781 ומקדם מוביל 1 כך שבקטע $[0, 3^{5781}]$ מתקיים $P(x) \in [-1, 1]$?
8. מצאו את כל הפולינומים המקיימים $p(p(x)) + x = p(p(x) + x)$.
9. הוכיחו כי קיים פתרון רציונלי למשוואה
 $1 + 2x + \dots + nx^{n-1} = n^2$
10. לכל פולינום f במקדמים שלמים נגדיר $f_n(x) = f(f(\dots f(x)))$ (כאשר f מופיע n פעמים). תארו את כל הפולינומים f (עם מקדמים שלמים) עבורם $n|f_n(x) - x$ לכל n טבעי ולכל x שלם.
11. נתון פולינום $p(x)$ ממעלה 3 ששורשיו x_1, x_2, x_3 ממשיים ומקיימים $x_1 < x_2 < x_3$. בנוסף נתון כי לפולינום $p(x) + c$ שלושה שורשים ממשיים y_1, y_2, y_3 . נתון כי $x_1 < y_1$. מי גדול יותר - x_2 או y_2 ?
12. נתונים שני פולינומים (עם מקדמים מרוכבים) $P(z), Q(z)$. נתון כי
 $P(z) = 0 \Leftrightarrow Q(z) = 0$
 $P(z) = 1 \Leftrightarrow Q(z) = 1$
הוכיחו כי שני הפולינומים זהים זה לזה.

בתיאבון!