

משפט פיק.

משפט: נתון שריג משבצות, בו שטח משבצת שווה ל-1. נתון מצולע עם קודקודים בצמתים של שריג. נסמן ב- i את כמות הצמתים של שריג שבתוך המצולע, וב- b את כמות הצמתים של השריג שנמצאים על שפת המצולע (כולל קודקודים). אז שטח המצולע הוא $S = \frac{1}{2}(b - 2) + i$.

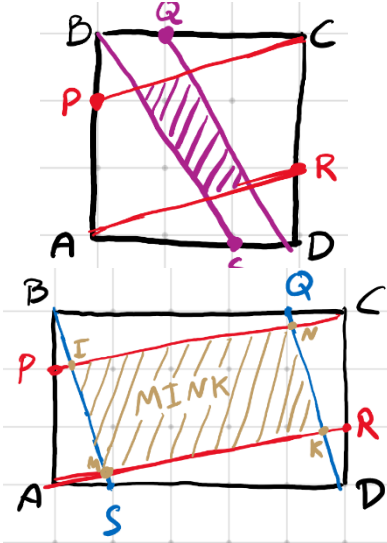
הערה: המשפט עובד גם אם המשבצות הן לא ריבועיות, אלא בצורת מקבילית.
חלק 1: הוכחה.

1. הוכיחו כי אם חותכים מצולע באמצעות קו שבור, ומקבלים שני מצולעים עם קודקודים בצמתים של שריג, אז $\frac{1}{2}(b - 2) + i = \frac{1}{2}(b_1 - 2) + i_1 + \frac{1}{2}(b_2 - 2) + i_2$, כאשר b_1, i_1, b_2, i_2 הם ה- b, i של המצולעים שהתקבלו.
2. הוכיחו כי כל מצולע אפשר לחלק למשולשים על ידי אלכסונים.
3. הוכיחו כי שטח של משולש עם $b = 3, i = 0$ הוא אכן $\frac{1}{2}$.
4. הוכיחו את משפט פיק.

חלק 2: תרגילים

1. הוכיחו כי בכל משולש חד-זווית על שריג ריבועי יש נקודות שריג פנימיות.
2. הוכיחו כי אם במשולש שריגי $b = 3, i = 1$ אז הצומת שבתוך המשולש נמצע במפגש התיכונים שלו.

3. הוכיחו כי אם במשולש שריגי יש בדיוק 2 צמתים על הצלעות או בפנים (חוץ מהקודקודים), אז הצמתים האלה נמצאים על תיכון.



4. נתון ריבוע ABCD עם צלע 3. נקודות P, Q, R, S נמצאות על צלעות AB, BC, CD, DA כך שמתקיים $BP = BQ = DR = DS = 1$. מצאו את שטח המקבילית שצלעותיה הן הישרים AR, BS, CP, DQ.

5. נתונה מלבן ABCD, אורכי צלעות שלו הן m, n . נתונות נקודות P, Q, R, S על צלעות AB, BC, CD, DA בהתאמה, כך שמתקיים $BP = CQ = DR = AS = 1$. נסמן את ארבעת הנקודות מפגש של AR, BS, CP, DQ ב-M, I, N, K. מצאו את השטח של המקבילית MINK.

6. נתון משולש ABC, ונקודות P, Q, R על צלעות BC, CA, AB, כל אחת מחלקת את הקטע המכוון שהיא נמצאת עליו ביחס של 1:2. נקודות X, Y, Z הן המפגשים של AP, BQ, CR של המשולש ABC ומשולש XYZ.

7. נתון משולש ABC, ונקודות P, Q, R על צלעות BC, CA, AB, כל אחת מחלקת את הקטע המכוון שהיא נמצאת עליו ביחס של 1:3. נקודות X, Y, Z הן המפגשים של AP, BQ, CR של המשולש ABC ומשולש XYZ.

