משוואות פל

1. הוכיחו שאם $3n+1, 4n+1$ ריבועים אז $56|n$.

2. אם $2+2\sqrt{28n^2+1}$ שלם אז הוא ריבוע.

3. מצאו את כל המספרים שהם גם משולשים וגם ריבועים.

4. פתרו את המשוואה $x^2-3y^4=1$ בשלמים כשנתון ש y זוגי.

5. * מצאו את כל המספרים שהם משולשים, ריבועים ומחומשיים.

6. הוכיחו שלכל $n>2$ קיימים שלמים חיוביים $a_1,a_2,\dots,a_n,\ b_1,b_2,\dots,b_n$ כך שלכל $1\le i\le n$ מתקיים $a_ia_{i+1}=b_i^2+i$ (כשמבחינתו $a_{n+1}=a_1$).

7. x_n, y_n הם הפתרונות הnים למשוואת פל $x_n^2-dy_n^2=1$ ($(x_0,y_0)=(1,0)$). ניקח p ראשוני אי זוגי. הוכיחו ש(x_n,y_n) מחזורי מודולו p, וש:
   a. אם $p|d$ אז אורך המחזור מחלק את $2p$.
   b. אם $p\nmid d$ אז אורך המחזור מחלק את $p-\left(\frac{d}{p}\right)$

8. ניקח p ראשוני אי זוגי, ונניח $p|y_k$. הוכיחו ש$v_p(y_{kl})=v_p(y_k)+v_p(l)$

9. מה קורה בשאלות 7,8 אם $p=2$?

10. לכל a טבעי, p ראשוני יש קבועים c,ϵ (שתלויים רק בa,p) כך שאם an^2+1 ריבוע אז $n>c\cdot(1+\epsilon)^{p^{v_p(n)}}$.

11. * מצאו את כל הזוגות של שלמים (x,y) כך ש$x^2-2y^2=\pm1$ וגם $\frac{x+1}{2}$ ריבוע.

12. * מצאו את כל השלמים החיוביים $k<100$ כך שקיים $n\neq 0$ עבורו המספרים $2n^2+1, kn^2+1, 2kn^2+1$ כולם ריבועים.

מספר נקרא משולשי אם הוא מהצורה $\frac{m(m+1)}{2}$ ומחומשי אם הוא מהצורה $\frac{m(3m-1)}{2}$ ל$m\in\mathbb{Z}$ כלשהו.

יותר משוואות פל

1. x, y שלמים חיוביים. הראו שאם $\frac{x^2+1}{y^2}+4$ ריבוע אז הוא שווה ל9.

2. א. הוכיחו שאם $|x^2-(a^2-1)y^2| = m < 2a+2$ אז m ריבוע. (כשע a, x, y שלמים חיוביים כלשהם).

   ב. הוכיחו שלכל a, b טבעיים, אם $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ הוא שלם זוגי, אז הוא ריבוע. (מה אם הוא אי-זוגי?)

3. פתרו בשלמים חיוביים את המשוואה $(2^n-1)(3^m-1) = k^2$.

4. ** נסמן $x_n + y_n\sqrt{d} = \left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^n$, כש $x_1^2 - dy_1^2 = 1$. הראו שאם x_n ריבוע אז $n \leq 2$. (רמז: תראו קודם שאם x_{2k+1} ריבוע אז x_1 ריבוע).

5. נסמן ב$\omega(n)$ את כמות המחלקים הראשוניים השונים של n. הוכיחו שלכל $a, b \neq 0$ שלמים כך שa לא ריבוע, יש סדרות אינסופיות של מספרים שלמים
$$x_1 < x_2 < x_3 < \cdots, \quad y_1 < y_2 < y_3 < \cdots$$
כך שלכל i מתקיים $x_i^2 - ay_i^2 = b$ ו$\lim_{i\to\infty} \omega(x_i) = \lim_{i\to\infty} \omega(y_i) = \infty$.