

תרגיל מספרים

1. הוכיחו שעבור כל n קיים ראשוני p כך שהיוצר הקטן ביותר מודולו p גדול מ- n .
2. מצאו את סכום כל היוצרים מודולו p .
3. נתון $p > 5$ ראשוני. הוכיחו שקיימים $a, b, c < p$ שונים כך ש:
$$p \mid abc - 1, \quad p \mid a + b + c$$
4. תהא a_1, a_2, \dots סדרה חשבונית אינסופית של מספרים טבעיים. נתון כי הסדרה מכילה גם ריבוע שלם וגם קוביה שלמה. הראו כי מכילה גם חזקה שישית שלמה.
5. נסמן עבור n טבעי ב- $d(n)$ את מספר המחלקים של n , ונגדיר $f(n) = d(n!) - d((n-1)!)$. הוכיחו כי קיימים אינסוף מספרים פריקים n עבורם מתקיים $f(m) < f(n)$ לכל $m < n$.
6. יהא $p > 3$ ראשוני, ונסמן $k = \left\lfloor \frac{2p}{3} \right\rfloor$. הוכיחו כי
$$p^2 \mid \binom{p}{1} + \binom{p}{2} + \dots + \binom{p}{k}$$
7. יהיו a, b שלמים חיוביים עבורם מתקיים $a! \mid b!$. הוכיחו כי $3a \geq 2b + 2$.
8. הוכיחו כי לכל a שלם חיובי קיימים שלמים חיוביים x, y עבורם
$$y^2 = x^3 + x + a^2$$