תרגיל מספרים

1. עבור אילו מספרים n מתקיים $7^n = **...*0001$?

2. מספרים ממשיים a,b מקיימים: $a+b$, a^2+b^2 , a^3+b^3 , ... כולם שלמים חיוביים.
האם בהכרח a ו-b שלמים?

3. מספרים ממשיים a,b מקיימים: $a-b$, a^2-b^2 , a^3-b^3 , ... כולם שלמים חיוביים.
האם בהכרח a ו-b שלמים?

4. הראו כי למספר $2^{2^n}-1$ יש לפחות n גורמים ראשוניים שונים. (הסיקו את משפט אוקלידוס: יש אינסוף מספרים ראשוניים).

5. הראו כי לכל a חיובי שלם ולכל p ראשוני, $a^{p^2}-a^p$ מתחלק ב-p^2 .

6. נתונים מספרים שלמים חיוביים $a>b$, ומספר שלם $n>1$. הראו כי למספר a^n-b^n יש מחלק ראשוני שהוא לא מחלק ראשוני של $a-b$.

7. נתון כי $3^n-2^n=p^m$, כאשר n,m שלמים חיוביים ו-p ראשוני. הראו כי n ראשוני.

8. עבור אילו ערכי n קיים k

א. כך ש-k^3-40 מתחלק ב-3^n אבל לא ב-3^{n+1} .

ב. כך ש-k^7+2400 מתחלק ב-7^n אבל לא ב-7^{n+1} .

9. מצאו מספר n תלת-ספרתי עבורו 4^n-1 מתחלק ב-n^2 .

10. פתרו את המשוואה $x^{2009}+y^{2009}=7^n$ כאשר x,y,n מספרים טבעיים.

11. א. הוכיחו שלכל $a>1$ שלם, קיימים אינסוף ראשוניים q כך שהחזקה המרבית של q בה מתחלק $a^{q-1}-1$ היא אי-זוגית.

ב*.** הראו כי קיימים אינסוף ראשוניים q עבורם $a^{q-1}-1$ מתחלק רק בחזקה ראשונה של q .

בתאבון!