

מספרים מספרים

במהלך התרגיל מספרים טבעיים זה $\mathbb{Z}_{\geq 0}$



1. הוכיחו ש- $10^{10^{10^n}} + 10^{10^n} + 10^n - 1$ הוא אינו ראשוני עבור $n > 0$.

2. F_m מסמן את מספרי פיבונאצ'י ($F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, F_1 = F_2 = 1$).

נתון פולינום מדרגה 1009 שמקיים $p(2n) = F_{2n}$ עבור

$n = 0, 1, \dots, 1009$, מצאו מספרים k, l כך ש- $p(2020) = F_k - F_l$.

3. איזה מספרים אפשר לקבל כ- $A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC$

עבור מספרים טבעיים A, B, C ?

4. הוכיחו שיש שלמים חיוביים a, n יחידים כך ש: $a^{n+1} - (a+1)^n = 2001$

5. כמה פולינום יש מהצורה $f(x) = ax^3 + bx$ כאשר $a, b \in \{1, 2, \dots, 2013\}$ עבורם אף

הפרש בין המספרים $f(1), f(2), \dots, f(2013)$ מתחלק ב-2013?

6. עבור כל k מצאו את כל הזוגות שלמים חיוביים a, b עבורם לכל n גדול מספיק:

$$a^n + b^n \mid (kn)!$$

7. נתון ראשוני אי-זוגי p , יש פולינום במקדמים מודולו p :

$$\sum_{k=0}^{p-1} a_k x^k$$

כאשר $a_k = k^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$. מצאו את ה- n המקסימלי עבורו $(x-1)^n$ מחלק את הפולינום.

8. נתון מספר אי-זוגי n , נסמן ב- M את כמות המספרים שזרים ל- n ונמצאים בתחום $(0, \frac{n}{4})$.

מצאו מתי M אי-זוגי.

9. הוכיחו שיש אינסוף k טבעיים עבורם: $\phi(2^k + 1) < 2^{k-1}$

ואינסוף עבורם: $\phi(2^k + 1) > 2^{k-1}$

10. מיכאל רשם את כל המספרים חסרי הריבועים בשורה אחת. הוכיחו שאינסוף פעמים מיכאל רשם ברצף שני מספרים עם הפרש 2020.

11. פנדה ודורבן פתחו חנות עוגיות, העוגיות מגיעות בקופסאות של p או q עוגיות, כאשר p, q

זרים. פנדה עשה רשימה של כל כמויות העוגיות שאי-אפשר לקנות מהחנות שלהם, ודורבן

העלה את המספרים בחזקת 2020 וסכם. הוכיחו שפנדה יכול להכפיל את התוצאה בקבוע n

שלא תלוי ב- p, q כך שהתוצאה תתחלק ב- $(p-1)(q-1)$.

בתאבון!