

קבוצת ירון

אין להשתמש במחשבון

$$1. \text{ פתרו את מערכת המשוואות: } \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = z^3 \\ x^2 + xz + z^2 = y^3 \\ y^2 + yz + z^2 = x^3 \end{cases} \text{ (כאשר } x, y, z \text{ ממשיים).}$$

2. איילה בוחרת k משבצות על לוח 8×8 , ומספרת לברווז כמה משבצות היא בחרה בכל שורה, עמודה ואלכסון (לא רק האלכסונים הארוכים, גם משבצת פינתית היא אלכסון). עבור אילו ערכים של k ברווז יוכל בוודאות לגלות איזה משבצות היא בחרה?

$$3. \text{ פתרו את המשוואה הבאה בשלמים: } x^5 + 3x^3 + 2x = y^3.$$

4. על צלעות המשושה הקמור ABCDEF נבנו כלפי חוץ משולשים משוכללים: ABM, EFK, DEN, BCI מיוחדת אם עוברים דרכה לפחות שני ישרים מתוך החמישה: AI, CM, FN, DI ו-BE. מצאו את כמות הנקודות המיוחדות במישור.

בהצלחה!

קבוצת רותם

אין להשתמש במחשבון

1. פתרו את המשוואה הבאה בשלמים: $x^5 + 3x^3 + 2x = y^3$.

2. על צלעות המשושה הקמור ABCDEF נבנו כלפי חוץ משולשים: BCI, ABM, DEN, EFK. נתון שהמשולשים ACE, DFB, AMB, ICB, DNE, KFE דומים בהתאמה, כלומר הזווית בקודקוד שנכתב ראשון בכל אחד מהמשולשים שווה, וכך גם הזווית בקודקוד שנכתב שני. נקודה נקראת מיוחדת אם עוברים דרכה לפחות שני ישרים מתוך החמישה: AI, CM, FN, DK ו-BE. מצאו את כמות הנקודות המיוחדות במישור.

3. במדינה גרים מספר אנשים. חלק מזוגות האנשים הם שכנים זה של זה. לכל אחד במדינה יש כמות כסף כלשהי בבנק (הבנק מאפשר לאנשים להיכנס למינוס). יום אחד, נחקק חוק במדינה, שאומר שביום הראשון של כל חודש, כל אדם צריך לתת מטבע כסף אחד לכל שכן שלו שבסוף החודש הקודם היה יותר עני ממנו.

הוכיחו שכעבור זמן מה, האנשים במדינה יכנסו למחזור באורך שתיים, כלומר כל חודשיים המצב יחזור למה שהיה קודם.

הערה: אנשים לא מרוויחים או מפסידים כסף באף דרך אחרת.

בהצלחה!

תחרות קבוצתית

אין להשתמש במחשבון

1. עבור איזה n טבעי גדול ביותר המספר $\prod_{k=1}^{155} (2^k - k)$ מתחלק ב- 31^n ?

2. בכל משבצת בלוח $N \times N$ יש כפר. כפרים נקראים סמוכים אם למשבצות שלהם יש לפחות קודקוד אחד משותף. איילה וברוזה משחקים משחק בתורות, ואיילה משחקת ראשונה. כל אחד בתורו יכול לחולל נס במשבצת בה עוד לא התחולל נס. בכל רגע נתון תושבי כל כפר סוגדים ללוטרה האחרונה שחוללה נס בכפר עצמו או בכפר סמוך. המשחק נגמר אחרי שהתחולל נס בכל כפר בלוח, ואז גמל סופר כמה כפרים סוגדים לכל לוטרה, ומכריז על הלוטרה שסוגדים לה יותר כפרים בתור המנצחת.

למי מהלוטרות יש אסטרטגיה מנצחת, כאשר:

א. $N = 7$?

ב. $N = 8$?

הערה: בהתחלה, כשעוד לא התחולל שום נס, כל הכפרים מאוכלסים באתאיסטים.

3. המעגל החוסם של משולש חד-זוויות ABC הוא ω ומרכזו O. גבהי המשולש AD ו-BE נפגשים ב-H. המשיקים ל- ω בנקודות A, B ו-C הם α , β ו- γ בהתאמה. הישר γ פוגש את הישרים α ו- β בנקודות K ו-L בהתאמה. הישרים KE ו-LD נחתכים ב-P. הוכיחו כי $4 \cdot PH \leq PO$.

4. האם קיימת קבוצה של נקודות במישור, כך שהשטחים של כל המשולשים עם קודקודים בנקודות אלו שלמים וחיוביים, אף 3 נקודות לא על ישר, וכל מספר חיובי שלם מתקבל בדיוק פעם אחת כשטח של אחד המשולשים?

5. בשורה כתובים שני מספרים: 0 ו-1. בכל שלב מתבצעת אוטומטית הפעולה הבאה: בין

כל שני מספרים a ו- b שמופיעים ברצף נכתב המספר $\left(\frac{\sqrt[15]{a} + \sqrt[15]{b}}{2}\right)^{15}$. אחרי שלב אחד

יש בשורה 3 מספרים, לאחר שני שלבים 5 מספרים וכו'. כעבור 15 שלבים כתובים בשורה די הרבה מספרים. מצאו את החלק השלם של הסכום שלהם.

6. לכנס אינטרנציונלי הגיעו n חייזרים. רוצים לערוך מספר פגישות בהן החייזרים יושבים מסביב לשולחן עגול, כך שכל חייזר ישב ליד כל חייזר אחר בדיוק פעם אחת. לאילו ערכי n זה אפשרי?

7. נתון מרובע חסום ABCD. נסמן ב- ω_1 את המעגל שעובר דרך C ו-D ומשיק לצלע BC, וב- ω_2 את המעגל שעובר דרך B ו-D ומשיק לצלע AB. נסמן ב-E את נקודת החיתוך השנייה של ω_1 עם המעגל ABE של החוסם של ABE. הוכיחו כי אם הישרים CF ו-AB מקבילים אז BD משיק ל- ω_1 .

8. המספרים a, b, c, d חיוביים. הוכיחו כי

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c} + \frac{a^2 + b^2 + d^2}{a + b + d} + \frac{a^2 + c^2 + d^2}{a + c + d} + \frac{b^2 + c^2 + d^2}{b + c + d} \leq \frac{4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)}{a + b + c + d}$$

בהצלחה!

קבוצת ירדן

אין להשתמש במחשבון

1. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ כך שלכל x ו- y ממשיים מתקיים:

$$f(f(y) + x + y) - (x + y) \cdot (x + 2f(y) + y) = (f(y))^2$$

2. במשולש ABC , הקטע AD הוא גובה (כש- D על BC), ו- M היא אמצע הצלע BC . חוצה הזווית BAC חותך שנית את המעגלים החוסמים של המשולשים ABD ו- ACD בנקודות X ו- Y בהתאמה. יש להוכיח שהמרובע $DXMY$ חסום במעגל.

3. מספר p הוא ראשוני אי-זוגי. מצאו את שארית החלוקה של

$$(1^2 + 1)(2^2 + 1) \cdot \dots \cdot ((p-1)^2 + 1)$$

ב- p . (התשובה תלויה ב- p .)

4. על הלוח רשומה שלישייה של מספרים $(0,0,0)$. בכל מהלך מותר להחליף את

השלישייה (x, y, z) באחת מארבע השלישיות:

$$(x, y-1, z-1) \text{ או } (x, y+1, z+1) \text{ או } (x-1, y, z-y) \text{ או } (x+1, y, z+y)$$

כמה מהלכים צריך לבצע על מנת להגיע לשלישייה $(0,0,5780)$?

רוצים להשיג את היעד בכמות הקטנה ביותר של מהלכים.

בהצלחה!