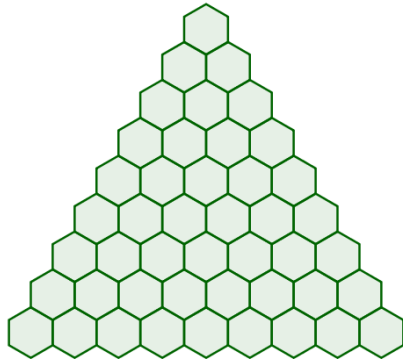


קבוצת ירדן

אין להשתמש במחשבון

1. איילה וברווז משחקים משחק פטרייתי על לוח משולשי עם משבצות שהן משושים (ראו



איור), כאשר בכל צלע 9 משבצות. בשלב הראשון של המשחק איילה מניחה פטריות על משבצות הלוח:

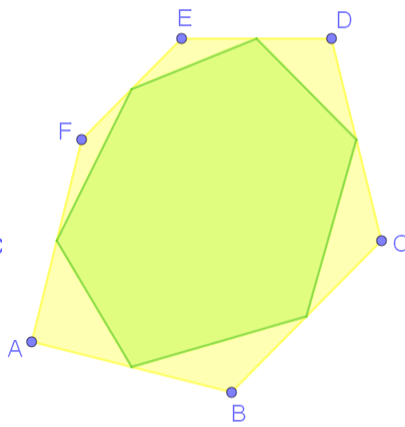
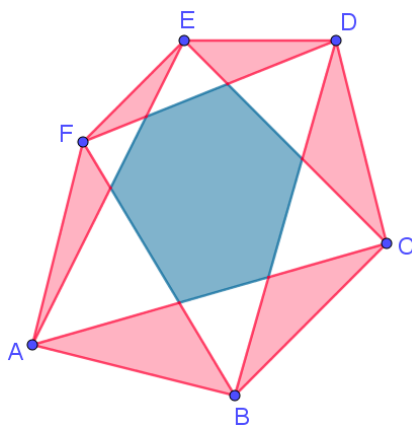
פטרייה אחת לכל היותר על כל משבצת. לאחר מכן ברווז יכול לבצע כמות כלשהי של מהלכים משני הסוגים הבאים, בכל סדר שהוא יבחר:

(א) לבחור שתי משבצות ריקות סמוכות ולהוסיף פטרייה לכל אחת מהן.

(ב) לבחור קודקוד מפגש של 3 משבצות שבכולן יש פטריות, ולאסוף את כולן.

מטרתו של ברווז היא שתשארנה בסוף המשחק כמה שפחות פטריות, ומטרתה של איילה היא שתשארנה כמה שיותר.

כמה פטריות יכולה איילה להבטיח שתשארנה על הלוח בסוף המשחק?



2. נתון משושה ABCDEF ששטחו S , והשטח של המשושה שנוצר מאמצעי הצלעות שלו (המשושה הירוק) הוא s .

החלקים של המשושה ABCDEF שלא מוכלים באיחוד של המשולשים ACE ו-BDF, נצבעו באדום, וחיתוך המשולשים ACE ו-BDF, נצבע בכחול. בטאו את ההפרש בין השטח הכחול לשטח האדום באמצעות S ו- s .

3. בארץ קסומה יש n סוגים של מטבעות בשווי $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ לירות, ויש גם שטרות בשווי $lcm(a_1, a_2, \dots, a_n)$ לירות. נסמן ב- $F(m)$ את מספר הדרכים לפרוט m שטרות באמצעות מטבעות. הראו כי $F(m)$ הוא פולינום.

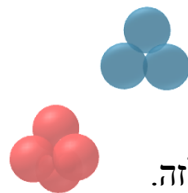
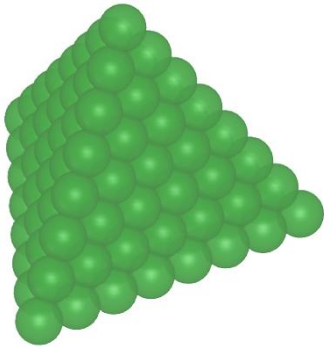
4. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ המקיימות

$a \cdot f(a+b) + f(1+a \cdot f(b)) = 1$ לכל a, b חיוביים.

בהצלחה!

קבוצת רותם

אין להשתמש במחשבון



1. איילה וברווז משחקים משחק פטרייתי תלת-ממדי בלוח ארבעוני המורכב מתאים כדוריים, כאשר בכל מקצוע 8 תאים (ראו איור). בשלב הראשון של המשחק איילה מכניסה פטריות על משבצות הלוח: פטרייה אחת לכל היותר על כל משבצת. לאחר מכן ברווז יכול לבצע כמות כלשהי של מהלכים משני הסוגים הבאים, בכל סדר שהוא יבחר:

(א) לבחור שלושה תאים ריקים שכל שניים מהם סמוכים זה לזה ולהוסיף פטרייה לכל אחד מהם.

(ב) לאסוף ארבע פטריות מתאים שכולם סמוכים זה לזה.

מטרתו של ברווז היא שתשארנה בסוף המשחק כמה שפחות פטריות, ומטרתה של איילה היא שתשארנה כמה שיותר.

כמה פטריות יכולה איילה להבטיח שתשארנה על הלוח בסוף המשחק?

הערה. איילה וברווז הן לוטרות מעופפות בעלות יכולת התעקקות, המאפשרת להן להגיע בכל רגע נתון גם לתאים פנימיים. בסה"כ יש 120 תאים בלוח.

2. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ המקיימות

$$a \cdot f(a+b) + f(1+a \cdot f(b)) = 1 \quad \text{לכל } a, b.$$

3. זוויות המשולש ABC שונות וחדות. מרכז המעגל החוסם הוא O; הגבהים נפגשים בנקודה H. נקודות M_a, M_b, M_c הן אמצעי הצלעות שמול A, B, C בהתאמה. נקודה K_a נמצאת על הישר BC והזווית $\sphericalangle K_a H M_a$ ישרה. באופן דומה מוגדרות הנקודות K_b, K_c . הקרן $\overline{M_a H}$ חותכת את המעגל החוסם של ABC בנקודה Q_a ; הישרים AQ_a ו-BC נפגשים בנקודה N_a . באופן דומה מוגדרות הנקודות N_b, N_c .

א. הראו כי הנקודות N_a, N_b, N_c נמצאות על ישר אחד. ישר זה יסומן n.

ב. הראו כי הנקודות K_a, K_b, K_c נמצאות על ישר אחד. ישר זה יסומן k.

ג. מה הוא היחס בין המרחקים מ-H לישרים k ו-n?

בהצלחה!

תחרות קבוצתית

אין להשתמש במחשבון

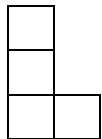
1. במשולש ABC הגבהים נפגשים בנקודה H והזווית הקטנה ביותר היא $\angle A = 36^\circ$. הנקודה K על הצלע AB נבחרה כך שהאמצע של BK הוא עקב הגובה מ-C. הנקודה L על הצלע AC נבחרה כך שהאמצע של CL הוא עקב הגובה מ-B. נקודות P ו-Q נבחרו כך שהמרובעים BKL P ו-CLKQ הם טרפזו"שים: $KB \parallel LP$ ו- $KQ \parallel LC$. הראו כי H, P ו-Q נמצאות על ישר אחד.

2. מצאו את כל הפתרונות השלמים של המשוואה $(2^a - 1)(2^b - 1) = 6^c + 1$.

3. בשפה יש K אותיות, N מילים, וכל המילים הן באורך M. תשבץ הוא טבלה $M \times M$ שבה כל שורה וכל עמודה היא מילה. מהו ה-N הגדול ביותר עבורו לא בהכרח קיים תשבץ עבור (א) $K = 2$ ו-M כלשהו? (ב) $K = 3$ ו-M כלשהו?

4.

5. מרובע ABCD חסום במעגל, ואלכסוניו נפגשים ב-X. אמצעי הצלעות AB, BC, CD הם M, N, K ועקב האנך מ-X ל-BC יסומן I. הוכיחו כי הנקודות M, I, N, K נמצאות על מעגל אחד.



6. עבור אילו מספרים שלמים חיוביים m, n ניתן לרצף מלבן $m \times n$ באמצעות הצורה הבאה בלבד? מותר לסובב אבל אסור לשקף.

7. במישור נמצאים שני מטמונים במרחק מטר זה מזה, וביניהם עומד שומר.

במרחק קילומטר מהשומר עומד פורץ, המהיר פי λ מהשומר. עבור אילו ערכי λ הפורץ יצליח להגיע לאחד המטמונים לפני שהשומר תופס אותו?

8. מהי הכמות המירבית של משבצות בלוח 5×5 שניתן לצבוע, כך שאף ישר לא עובר בנקודות פנימיות של 3 מבין המשבצות הצבועות?

9. מספרים חיוביים a, b, c, d מקיימים $a + b + c + d = 18$. הוכיחו כי

$$\sqrt{\frac{a}{b+6}} + \sqrt{\frac{b}{c+6}} + \sqrt{\frac{c}{d+6}} + \sqrt{\frac{d}{a+6}} \leq 5 \cdot \sqrt{\frac{2}{7}}$$

בהצלחה!