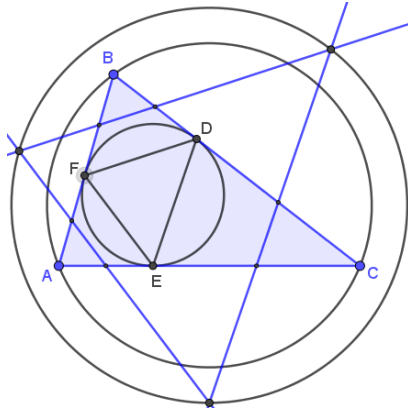


קבוצת ירדן

אין להשתמש במחשבון



1. במשולש ABC המעגל החסום משיק לצלעות BC, CA, AB בנקודות D, E, F בהתאמה. הישר שנמצא במרחקים שווים מ-EF ומהנקודה A, והישר שנמצא במרחקים שווים מ-FD ומהנקודה B, והישר שנמצא במרחקים שווים מ-DE ומהנקודה C, יוצרים את המשולש PQR. הוכיחו שלמעגלים החוסמים של המשולשים ABC, PQR יש מרכז משותף.

הבהרה. בשביל שהמרחק בין שני ישרים יהיה מוגדר, הישרים חייבים להיות מקבילים.

2. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ כך שלכל $x, y > 0$ מתקיים

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) - xy$$

3. הראו שלכל 3 מספרים שלמים חיוביים a, b, c שאף אחד מהם לא מתחלק באחר מתקיים

$$2a + 2b + 2c + \gcd(a,b) + \gcd(b,c) + \gcd(a,c) < \text{lcm}(a,b) + \text{lcm}(b,c) + \text{lcm}(a,c)$$

4. האם קיימת פונקציה חד-חד-ערכית ועל ממישור לעצמו, שמעבירה כל מעגל לשפה של משולש?

בהצלחה!

קבוצת רותם

אין להשתמש במחשבון

1. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ כך שכל $x, y > 0$ מתקיים

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) - xy$$

2. האם קיימת פונקציה חד-חד-ערכית ועל ממישור לעצמו, שמעבירה כל מעגל לשפה של משולש?

3. על ראשו של מינקובסקי כובע באחד מ- N צבעים ידועים מראש שהוא צריך לנחש. איילה שולחת לו רמז – מספר מ-1 עד 4 כולל, שרשום על פתק אדום; ברווז שולח לו רמז דומה על פתק כתום, וגמל שולח לו רמז על פתק צהוב. דבורה, שמנסה להפריע, רושמת מספר נוסף על כל אחד מהפתקים (אולי לפני ואולי אחרי המספר שכבר רשום). אחרי שמינקובסקי מקבל את הרמזים, יש לו שתי הזדמנויות לנחש. עבור אילו ערכי N יש שיטה שמאפשרת למינקובסקי לנחש את הצבע?

בהצלחה!

קבוצת ירדן

אין להשתמש במחשבון

1. נתונים מספרים ממשיים שונים מאפס x ו- y עבורם $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy - x + y + \frac{1}{xy}$ הם

מספרים שלמים. הראו כי $x^7 + y^7 + \frac{1}{x^7 y^7}$ הוא מספר שלם.

2. עבור אילו ערכי N המספר $2^N + 5^N$ מתחלק ב-101?

3. בהינתן n פולינומים במקדמים ממשיים $P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)$ ניתן להגדיר גרף $G(P_1, \dots, P_n)$ באופן הבא: הקודקודים הם $1, 2, \dots, n$ ובין זוג קודקודים i, j מחברת קשת אם ורק אם לפולינום $P_i(x) - P_j(x)$ יש שורש ממשי. עבור אילו ערכי n לכל גרף על n קודקודים קיימים n פולינומים כך שהגרף הוא $G(P_1, \dots, P_n)$?

4. ישר l הוא המשיק החיצוני המשותף של שני מעגלים α ו- β שלא נחתכים (כלומר שני המעגלים באותו צד של הישר). נקודה P נמצאת על הישר l בין נקודות ההשקה עם המעגלים. המשיקים ששונים מ- l מנקודה P למעגלים α ו- β הם l_a ו- l_b . הישר l_1 מקביל ל- l_a ומשיק למעגל β מהצד ההפוך - אם α נמצא מעל l_a , אז β מתחת ל- l_1 . באופן דומה מוגדר הישר l_2 שמקביל ל- l_b ומשיק למעגל α מהצד ההפוך. הישרים l_1 ו- l_2 נפגשים בנקודה Q . הראו ש- Q נמצאת על ישר שמשיק ל- α ו- β .

בהצלחה!