

קבוצת ירדן

אין להשתמש במחשבון

1. טרפז ABCD חסום במעגל, AD מקביל ל-BC. במשולש ABC הגבהים AE, BF ו-CG נפגשים בנקודה H. הראו כי הישר DH והמעגלים החוסמים של EAD ושל EFG נפגשים בנקודה אחת.

2. נתון מספר $n > 1$ טבעי. סכום הריבועים של כל המחלקים הטבעיים של n שווה ל- S . הראו כי $S < \frac{7}{4}n^2$.

3. לכל תת קבוצה בגודל אי-זוגי של הקבוצה $\{1, 2, 4, 8, \dots, 2^{100}\}$ מחשבים את החציון שלה. מהו סכום כל החציונים הללו?

הבהרה. חציון של קבוצת מספרים הוא המספר כך שכמות המספרים בקבוצה שגדולים ממנו שווה לכמות המספרים בקבוצה שקטנים ממנו.

4. אורך של כל המקצוע של ארבעון משוכלל ABCD שווה ל-1. מישור שעובר דרך מרכז הארבעון חותך את הארבעון במצולע. מהו האורך הקטן ביותר שיכול להיות להיקף של מצולע שנוצר בחתך?

בהצלחה!

תחרות קבוצתית

אין להשתמש במחשבון

1. מצאו את כל זוגות המספרים השלמים (x, y) עבורם $7^x = 3 \cdot 2^y + 1$.
2. על מעגל שקוטרו SN נבחרו 3 נקודות A, B, C כך שהמיתר BC מאונך לקוטר SN. חיתוך הישרים AB ו-CS יקרא X, חיתוך הישרים AC ו-BS יקרא Y, חיתוך הישרים AB ו-CN יקרא Z, וחיתוך הישרים AC ו-BN יקרא W. הישרים XW ו-YZ נפגשים בנקודה T. הראו כי AT משיק למעגל הנתון.
3. פולינומים פשוטים אלה פולינומים שכל המקדמים שלהם ± 1 או 0. האם הפולינום $P(x) = x^{216} - x^{61} - x^2 + 126 \cdot x^{126} - 12 \cdot x^{12} - 6x^6$ שווה למכפלה של פולינומים פשוטים?
4. נתונים אריחים בצורה של משולש משוכלל בעל אורך צלע 1, וקופסא בצורת משולש משוכלל עם אורך צלע t .
- א. הראו שאם $t = \sqrt{3} + 1$ אז ניתן לשים חמישה אריחים שלא יעלו זה על זה בקופסא.
ב. הוכיחו שעבור t קטן יותר זה לא אפשרי.
5. לכל מספר טבעי n נסמן ב- $s(n)$ את סכום הספרות של n ברישום עשרוני. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ ש- f על, ולכל $x, y \in \mathbb{Z}_{>0}$ מתקיים
- $$f(x) + f(y) + s(x+y) = s(f(x) + f(y)) + s(x) + s(y)$$
6. צבא יוון וצבא טרויה יוצאים לקרב. לכל אחד מהצבאות יש כמות כלשהי של לוחמים. לכל לוחם יש חוסן וחוזק מסוימים, שניהם שלמים חיוביים. הקרב מתנהל באופן הבא: בכל שעה, כל אחד מהצבאות שולח באקראי לוחם שעדיין בחיים, והשניים הולכים להכות זה את זה. כל אחד מהם מאבד כמות חוסן ששווה לחוזק של הלוחם השני. לוחם שכמות החוסן שלו יורדת לאפס או פחות, מת. התהליך הזה קורה שוב ושוב עד שאחד הצבאות מת לחלוטין, ואז הצבא השני מנצח - או ששני הצבאות מתים בו-זמנית, ואז יש תיקו. נניח שצבא יוון יכול לנצח בסיכוי חיובי כלשהו, וגם צבא טרויה יכול לנצח בסיכוי חיובי כלשהו. האם בהכרח יכול להיות תיקו בסיכוי חיובי כלשהו? הבהרה: בשני הצבאות יכולים להיות בהתחלה לוחמים עם רמות שונות של חוסן וחוזק.
7. המספרים a, b, c לא שליליים, ומתקיים $ab + ac + bc \neq 0$. הוכיחו כי

$$\sqrt{\frac{a^2 + 108bc}{b^2 + c^2}} + \sqrt{\frac{b^2 + 108ac}{a^2 + c^2}} + \sqrt{\frac{c^2 + 108ab}{a^2 + b^2}} \geq 9$$

בהצלחה!

קבוצת ירדן

דף גמל

אין להשתמש במחשבון

1. מהי הכמות המרבית של אבני דומינו שניתן להניח על לוח משבצות 8×8 כך שכל אבן דומינו תופסת בדיוק שתי משבצות סמוכות, ולאף שתי אבני דומינו אין קטע גבול משותף באורך לא אפסי?

2. האם קיימים מספרים שלמים חיוביים x, y עבורם המספר $x^{(2x)^{3x}} + y^{(2y)^{3y}}$ הוא ריבוע שלם?

3. הפולינום P שאינו קבוע מקיים $P(n) \cdot \binom{n+2021}{2021} = P(n+1) \cdot \binom{n}{2021}$ לכל מספר טבעי $n > 2021$. מצאו את כל האפשרויות לדרגה של P .

4. נתון מרובע ABCD החוסם מעגל עם מרכז ב-I. הישר המאונך ל-AI שעובר דרך A והישר המאונך ל-BI שעובר דרך B נחתכים בנקודה P. הישר המאונך ל-CI שעובר דרך C והישר המאונך ל-DI שעובר דרך D נחתכים בנקודה Q. הוכיחו שהנקודות P, I, Q נמצאות על ישר אחד.

בהצלחה!

קבוצת ירדן

דף דורבן

אין להשתמש במחשבון

5. אגני ולאון מקבלים את המספרים הממשיים החיוביים $a_1, a_2, \dots, a_6, b_1, b_2, \dots, b_6$. אגני כתב את 36 הסכומים מהצורה $a_i + b_j$ ולאון כתב את 36 המכפלות $a_i \cdot b_j$. נתון שכל אחד מהם כתב את אותם 36 המספרים, לאו דווקא באותו הסדר. הראו כי $a_1 = a_2 = \dots = a_6$, וכן $b_1 = b_2 = \dots = b_6$.

6. דורבן מסמן n נקודות אדומות במישור ואז היפו מסמן נקודה כחולה באמצע בין כל שתי נקודות אדומות. האם יתכן שהנקודות הכחולות הן קודקודים של מצולע משוכלל עם $\binom{n}{2}$

צלעות עבור

א. $n = 4$?ב. $n = 5$?

7. מהי הכמות המרבית של אבני דומינו שניתן להניח על לוח משבצות 7×7 כך שכל אבן דומינו תופסת בדיוק שתי משבצות סמוכות, ולאף שתי אבני דומינו אין קטע גבול משותף באורך לא אפסי?

בהצלחה!