

קבוצת ירדן – מבחן בע"פ – דף איילה

אין להשתמש במחשבון

1. במשולש ABC נשקף את הנקודה A מבעד לצלע BC ונקבל את הנקודה A'. עקבי האנכים מ-A' לצלעות AB ו-AC יקראו D ו-E והשיקופים שלהם ביחס לישר BC יקראו D' ו-E'. הוכיחו שהנקודות A, D', E', A' נמצאות על מעגל אחד.

2. מצאו את כל הפונקציות f מקבוצת המספרים השלמים החיוביים לעצמה כך ש- $f(n) \cdot f(f(n)) = n^2$.

3. יש 1000 פטריות מ-11 סוגים, ואיילה מסדרת אותן באריזות של 10 פטריות כל אחת. אריזה נקראת מבולגנת אם יש בה יותר מסוג אחד של פטריות. עבור איזה K קטן ביותר איילה יכולה להבטיח שתהיינה לא יותר מאשר K אריזות מבולגנות?

4. מספרים חיוביים x, y מקיימים $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+\sqrt[3]{y}} = 1$.

מצאו את הערך של $\log_3 \left(\log_2 x + \sqrt{1 + (\log_2 x)^2} \right) + \log_3 \left(\log_2 y + \sqrt{9 + (\log_2 y)^2} \right)$ (יש למצוא את כל התשובות האפשריות).
תזכורת. \sqrt{x} תמיד לא שלילי.

בהצלחה!

קבוצת ירדן – מבחן בע"פ – דף ברווז

אין להשתמש במחשבון

5. במדינת הגמדים משתמשים בייצוג עשרוני, אך במקום הספרות 0, 1, 2, ... , 9 משתמשים בספרות A, B, C, ..., J, המייצגות את הספרות המקוריות בסדר לא ידוע. כפיר מעוניין לגלות את הסדר, כדי שיוכל לתרגם מספרים משפת הגמדים לשפתנו. למזלו, סימן החיבור '+' זהה אצל הגמדים, ועל כן כפיר יכול לשאול את זקן הגמדים מהו סכומם של שני מספרים בשפת הגמדים, והזקן משיב לו (גם בשפת הגמדים).

כמה שאלות כאלו כפיר צריך כדי לגלות בוודאות מהי המשמעות של כל אחת מהספרות?

6. נתון מצולע משוכלל $A_1A_2A_3\dots A_n$. האם ניתן לבחור נקודות B_k על הצלעות A_kA_{k+1} , ונקודה B_n על הצלע A_nA_1 כך שבמצולע $B_1B_2\dots B_n$

א. כל הזוויות שוות אבל לא כל הצלעות שוות?

ב. כל הצלעות שוות אבל לא כל הזוויות שוות?

התשובה בכל סעיף תלויה ב- n .

7. הראו כי $1 + x + x^2 + 125 \cdot x^{65} \geq \left(1 + \frac{x + x^2 + x^4 + x^8 + x^{16} + x^{32} + x^{64}}{7}\right)^7$ לכל x

חיובי.

בהצלחה!

תחרות קבוצתית

אין להשתמש במחשבון

1. מצאו את כל הרביעיות של מספרים שלמים חיוביים a, b, c, n כך שמתקיים

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca = 2^n$$

2. הראו שלכל ארבעה מספרים חיוביים a, b, c ו- d מתקיים

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + ab + b^2} + \sqrt{b^2 + bc + c^2} + \sqrt{c^2 + cd + d^2} + \sqrt{d^2 + da + a^2} &\geq \\ &\geq 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} + 8\sqrt{abcd} \end{aligned}$$

3. נתון מרובע עם קודקודים בצמתים של סריג. על הצלעות ועל האלכסונים של המרובע אין צמתים נוספים של סריג. השטח של המרובע גדול מ-1.

א. מהו השטח המינימלי של המרובע?

ב. מהו השטח המינימלי של המרובע בהנחה שהוא קמור?

4. סופר-פולינום $f(x)$ זה פונקציה שמשמשת בחיבור, כפל, קבועים ממשיים ובפעולת

ערך שברי. למשל $\{x^2 + 0.3 \cdot x\} + \{\{x\}^8 - 5x\}$ זה סופר-פולינום. האם קיים סופר-

פולינום $f(x)$ עבורו $f(2021) = 2021$ ו- $f(5781) = 5781$ לכל x ממשי שונה מ-2021?

5. במישור נתונים מספר מעגלים c_1, c_2, \dots, c_n . נסמן ב- $d(c_i)$ את אורך הקוטר של c_i ונסמן

ב- $\ell(c_i, c_j)$ את המרחק בין המרכזים של c_i ו- c_j . נתון כי $\ell(c_i, c_j)^2 = d(c_i) \cdot d(c_j)$,

לכל $1 \leq i < j \leq n$. עבור איזה n הכי גדול זה יתכן?

6. נתון משולש ABC . הישר המחבר את הנקודה A למפגש המשיקים למעגל החוסם של

המשולש בנקודות B, C , חותך שנית את המעגל החוסם בנקודה P . הוכיחו כי הישר המחבר

את השיקופים של הנקודה P ביחס לישירים AB, AC , עובר גם בשתי נקודות ההשקה של

המשיקים מ- A למעגל שקוטרו BC .

7. נזכיר את ההגדרה של מספרי לוקאס: $L_1 = 1, L_2 = 3$ ונוסחת הנסיגה $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$.

בהינתן תמורה σ שאורכי המעגלים שלה הם c_1, c_2, \dots, c_m , נגדיר $f(\sigma) = \prod_{i=1}^m L_{c_i}$. הראו

כי $\sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma)$ מתחלק ב- $n!$.

8. במישור מסומנות N נקודות שאף שלוש מהן לא על ישר אחד. משולש עם קודקודים

בנקודות מסומנות נקרא מגניב אם בתוכו נמצאת נקודה מסומנת אחת בדיוק. האם יתכן שיותר

ממחצית מכל המשולשים עם קודקודים בנקודות המסומנות הם מגניבים?

בהצלחה!

קבוצת ירדן

אין להשתמש במחשבון

1. נתבונן במשוואה $t^3 + at^2 + bt + c = 0$ כאשר a ו- b נקבעו מראש ו- c מקבל ערכים שונים. לכל ערך של c עבורו יש שלושה פתרונות ממשיים שונים x, y, z למשוואה, בונים נקודה (x, y, z) במרחב, וכך מתקבלות אינסוף נקודות. הראו כי כל הנקודות שניתן לקבל בצורה הזאת עבור a ו- b נתונים נמצאות על מעגל אחד במרחב.

2. א. איילה וברווז משחקים משחק: בהתחלה איילה נותנת לברווז שתי טבלאות 100×100 של שלמים חיוביים כך שמכפלת המספרים בכל טבלה היא זהה. ברווז יכול לבחור כל פעם שורה או עמודה באחת הטבלאות, ולשנות את המספרים שיש בה (לשלמים חיוביים כלשהם), כל עוד הוא לא משנה את המכפלה הכוללת בטבלה. אם ברווז מצליח לאחר N פעולות כאלה לגרום לשתי הטבלאות להיות זהות, הוא מנצח, ואחרת איילה מנצחת. עבור אילו ערכי N יש לברווז אסטרטגיה מנצחת?

ב. עבור אילו ערכי N יש לברווז אסטרטגיה מנצחת, אם בטבלאות של איילה כל המספרים הם חזקות של 2?

3. נסמן ב- $s_k(x)$ את סכום הספרות של x ברישום בבסיס k . מצאו את המספר הטבעי הקטן ביותר n עבורו מתקיימת הזהות

$$s_{27}(n) + s_{27}(3n) + s_{27}(9n) = s_8(n) + s_8(2n) + s_8(4n).$$

4. נתון משולש ABC , ושני משולשים חופפים $A_1B_1C_1$ ו- $A_2B_2C_2$, שכל אחד מהם דומה בהתאמה למשולש ABC וחסום בו: A_i, B_i, C_i נמצאות על צלעות המשולש ABC , כאשר הנקודות A_i נמצאות על הצלע מול A , הנקודות B_i על הצלע מול B , הנקודות C_i על הצלע מול C . הראו שנקודת מפגש הגבהים של המשולש $A_1B_1C_1$ מתלכדת עם נקודת מפגש הגבהים של המשולש $A_2B_2C_2$.

בהצלחה!

קבוצת רותם

אין להשתמש במחשבון

1. א. איילה וברווז משחקים משחק: בהתחלה איילה נותנת לברווז שתי טבלאות 100×100 של שלמים חיוביים כך שמכפלת המספרים בכל טבלה היא זהה. ברווז יכול לבחור כל פעם שורה או עמודה באחת הטבלאות, ולשנות את המספרים שיש בה (לשלמים חיוביים כלשהם), כל עוד הוא לא משנה את המכפלה הכוללת בטבלה. אם ברווז מצליח לאחר N פעולות כאלה לגרום לשתי הטבלאות להיות זהות, הוא מנצח, ואחרת איילה מנצחת. עבור אילו ערכי N יש לברווז אסטרטגיה מנצחת?
- ב. עבור אילו ערכי N יש לברווז אסטרטגיה מנצחת, אם בטבלאות של איילה כל המספרים הם חזקות של 2?

2. מצאו את כל הפונקציות הלא חסומות $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ כך שלכל x, y מתקיים
- $$f(f(x) - y) \mid x - f(y)$$

3. נתון משולש ABC , ושני משולשים חופפים $A_1B_1C_1$ ו- $A_2B_2C_2$, שכל אחד מהם דומה בהתאמה למשולש ABC וחסום בו: A_i, B_i, C_i נמצאות על צלעות המשולש ABC , כאשר הנקודות A_i נמצאות על הצלע מול A , הנקודות B_i על הצלע מול B , הנקודות C_i על הצלע מול C . המעגל החוסם של $A_1B_1C_1$ והמעגל החוסם של $A_2B_2C_2$ נחתכים בשתי נקודות: P ו- Q . הראו כי הישר PQ עובר דרך נקודת מפגש הגבהים של המשולש ABC .

בהצלחה!