

חישוב מרוכב

1. נתון משולש ABC החסום במעגל ω , הנקודות הנגדיות ל-A, B, C על ω יסומנו A', B', C' בהתאמה. בתוך המשולש נבחרה נקודה שרירותית P. ההיטלים של P על BC, AC, AB יסומנו D, E, F בהתאמה. השיקופים של A', B', C' ביחס ל-D, E, F יסומנו X, Y, Z בהתאמה.

הוכיחו כי המשולש XYZ דומה למשולש ABC.

2. נתון משולש ABC ונקודות A_1, B_1, C_1 על הצלעות BC, AC, AB בהתאמה. המעגלים החוסמים של $AB_1C_1, BA_1C_1, CA_1B_1$ חותכים את המעגל החוסם של ABC בנקודות A_2, B_2, C_2 בהתאמה. השיקופים של A_1, B_1, C_1 ביחס לאמצעי הצלעות המתאימות יסומנו A_3, B_3, C_3 בהתאמה. הוכיחו כי המשולשים $A_2B_2C_2$ ו- $A_3B_3C_3$ דומים.

3. נתון טרפז $AB \parallel CD, ABCD$. אמצע AC יסומן ב-E. המעגלים החוסמים של ABE, CDE יסומנו ω_1, ω_2 בהתאמה. המשיק ל- ω_1 ב-A והמשיק ל- ω_2 ב-D נחתכים בנקודה P. הוכיחו כי PE משיק ל- ω_2 .

4. נתון משולש ABC, מפגש הגבהים במשולש הוא H. המעגל החוסם של ACH חותך את חוצה הזווית של $\angle BAC$ בנקודה P. מפגש הגבהים של APC הוא Y ומרכז המעגל החוסם של APB הוא X. הוכיחו כי אורכו של XY הוא כאורך הרדיוס של המעגל החוסם של ABC.

5. יהיה O מרכז המעגל החוסם של ABC. AO חותך את הגבהים מ-B, C ב-P, Q. בהתאמה. מפגש הגבהים יסומן H. הוכיחו כי מרכז המעגל החוסם של PQH נמצא על התיכון של ABC.

6. נתון מעגל ω עם קוטר AB. על ω נבחרו נקודות P, Q כך ש- $AP = AQ < BP$. על הקטע PQ נבחרה נקודה X. AX חותך את ω שנית בנקודה S. על הקשת AQB נבחרה נקודה T כך ש-AX מאונך ל-TX. אמצע TS יסומן M. הוכיחו כי כאשר X זז על PQ, M זז על מעגל.

7. נתון משולש ABC. עקב הגובה מ-A לישר אוילר של המשולש יסומן D. דרך D, A, הועבר מעגל ω החותך את AB, AC בנקודות X, Y בהתאמה. המרכז של ω יסומן S. M היא אמצע BC ו-P היא עקב האנג מ-A ל-BC. הוכיחו כי המרחקים ממרכז המעגל החוסם של XSY ל-M, P שווים.

8. נתון משולש ABC, המעגל החוסם שלו ω ומרכז המעגל החוסם O. תהיה P נקודה שרירותית על ω . נסמן את המרכזים של המעגלים החוסמים של AOP, BOP, COP ב- O_A, O_B, O_C בהתאמה. נעביר דרך O_A ישר המאונך לצלע BC ונסמן אותו l_A . באופן דומה נגדיר את l_B, l_C . הוכיחו כי המעגל החוסם את המשולש שנוצר מהישרים l_A, l_B, l_C משיק לישר OP.

בתאבון!

דף נוסחאות

כשמדובר במיתרים הכוונה למיתרים של מעגל יחידה עם מרכז בראשית.

$$\frac{2ab}{a+b} \quad \text{חיתוך משיקים של נקודות על המעגל}$$

$$a+b+c \quad \text{מפגש הגבהים שחסום במעגל היחידה}$$

$$\frac{b-a}{c-a} \in \mathbb{R} \quad \text{נקודות על ישר עם}$$

$$\frac{a-b}{c-d} \in i \cdot \mathbb{R} \quad \text{ישרים מאונכים: } AB \perp CD \text{ אם}$$

$$z \mapsto \frac{(a-b)\bar{z} - a\bar{b} + \bar{a}b}{\bar{a} - \bar{b}} \quad \text{שיקוף ביחס לישר:}$$

$$z \mapsto a+b-ab\bar{z} \quad \text{שיקוף ביחס למיתר:}$$

$$\frac{b-a}{c-a} = \frac{b'-a'}{c'-a'} \quad \text{משולשים דומים: חיובית -}$$

$$\overline{\left(\frac{b-a}{c-a}\right)} = \frac{b'-a'}{c'-a'} \quad \text{שלילית -}$$

$$\frac{ab(c+d) - cd(a+b)}{ab - cd} \quad \text{חיתוך מיתרים:}$$

$$\begin{vmatrix} x & x \cdot \bar{x} & 1 \\ y & y \cdot \bar{y} & 1 \\ z & z \cdot \bar{z} & 1 \end{vmatrix}$$

מרכז מעגל:

$$\begin{vmatrix} x & \bar{x} & 1 \\ y & \bar{y} & 1 \\ z & \bar{z} & 1 \end{vmatrix}$$

$$\frac{ad-bc}{a+d-b-c} \quad \text{הוא } \begin{cases} A \mapsto C \\ B \mapsto D \end{cases} \quad \text{מרכז העתקה ספירלית}$$