

## חיתוכים

1. 2020 מעגלים בעלי אותו רדיוס מצוירים במישור כך שאף שניים לא משיקים וכל מעגל חותך לפחות מעגל אחד אחר. הוכיחו כי יש לפחות 2020 נקודות חיתוך.
2. תהא  $S$  קבוצה סופית של נקודות במישור, בעלת שתי נקודות לפחות. נניח כי אף שלוש נקודות של  $S$  לא נמצאות על ישר אחד. **תחנת רוח** היא תהליך שמתחיל עם ישר  $\ell$  שעובר דרך נקודה יחידה  $P$  מהקבוצה  $S$ . הישר מסתובב עם כיוון השעון מסביב לנקודה  $P$ , שתקרא **המיסב**, עד לרגע הראשון בו הישר יכיל נקודה נוספת של  $S$ . נקודה זו, שתקרא  $Q$ , הופכת להיות המיסב החדש, והישר ממשיך להסתובב עם כיוון השעון מסביב ל- $Q$ , עד לרגע הבא בו הישר יכיל שתי נקודות של  $S$ . התהליך ימשך כך לנצח. הוכח כי ניתן לבחור נקודה  $P$  מ- $S$  וישר  $\ell$  דרך  $P$  כך שתחנת הרוח שתתקבל תשתמש בכל נקודה מ- $S$  כמיסב אינסוף פעמים.
3. לאילו  $N$  קיים קו שבור סגור עם  $N$  צלעות כך שכל צלע שלו חותכת בדיוק צלע אחת מבין הצלעות האחרות?
4. במצולע לא קמור (קו שבור סגור שלא חותך את עצמו) זוג צלעות ייקרא מוזר אם ההמשך של צלע אחת חותכת את הצלע האחרת. הראו כי יש מספר זוגי של זוגות מוזרים.
5. מישור חולק על ידי  $N$  ישרים למספר מצולעים קמורים ולאזורים אינסופיים. יהיו שני מצולעים קמורים מתוכם הוכח שסכום מספר הצלעות שלהם הוא לכל היותר  $N + 4$ .
6. על כל פאה של פאון נמצאת נמלה שהולכת על שפתו נגד כיוון השעון, כל אחת יכולה ללכת בקצב משתנה (ואף לעשות מנוחות) אבל כל אחת הולכת מרחק אינסופי. הוכיחו כי שתיים מהן תפגשנה.
7. יהיו 2018 מעגלים שכל זוג חותך אחד את השני ב-2 נקודות ואף שלושה לא נחתכים. המעגלים יוצרים גרף (שקשתותיו הן קשתות מעגליות) שדרגת כל קודקוד בו היא 4. על כל מעגל נצבע את הקודקודים עליו לסירוגין באדום וכחול (זה אפשרי מכיוון שיש מספר זוגי של קודקודים על כל מעגל). כך שכל קודקוד נצבע פעמיים. קודקוד ייקרא צבעוני אם הוא נצבע גם באדום וגם בכחול, נניח שיש מעגל שעליו לפחות 2061 קודקודים צבעוניים, הוכיחו כי קיימת פאה בגרף שכל קודקודיה צבעוניים.

8. נתונים  $n > 2$  קטעים במישור, שכל שניים מהם נחתכים בנקודה אשר פנימית לשניהם, ואף שלושה לא נפגשים בנקודה אחת. לב צריך לבחור נקודת קצה בכל אחד מהקטעים, ולמקם עליה צפרדע המופנית כלפי נקודת הקצה השנייה. לאחר מכן הוא ימחא כפיים  $n - 1$  פעמים, עם כל מחיאה, כל צפרדע תקפוץ קדימה לנקודת החיתוך הבאה על קטעה. צפרדע לא יכולה לשנות את כיוון קפיצתה. משאלת לב היא למקם את הצפרדעים כך שאף שתיים לעולם לא תמצאנה באותה נקודת חיתוך באותו הזמן.

א. עבור  $n$  אי-זוגי, הוכיחו כי לב תמיד יכול להגשים את משאלתו.

ב. עבור  $n$  זוגי, הוכיחו כי לב לעולם לא יכול להגשים את משאלתו.

9. נתונים  $n \geq 3$  ישרים במצב כללי במישור. הוכיחו שניתן לצבוע לפחות  $\sqrt{n}$  מהם בכחול כך שלא יהיה אזור סופי שכל השפה שלו צבועה כחול.

10. נתונים 2017 ישרים במישור, כך שאף שלושה לא עוברים דרך נקודה אחת. טורבו החילזון יושב על נקודה כלשהי על בדיוק אחד הישרים, ומתחיל ללכת לאורך הישרים באופן הבא: הוא נע לאורך הישר עליו הוא נמצא עד שהוא מגיע להצטלבות עם ישר אחר. בהצטלבות הוא ממשיך את מסעו לאורך הישר האחר תוך פנייה שמאלה או ימינה, ובכל הצטלבות הוא משנה את בחירת כיוון הפנייה, לסירוגין. טורבו יכול לשנות את כיוון תנועתה רק בנקודות ההצטלבות. האם ייתכן שקיים קטע אשר טורבו מחליק לאורכו בשני הכיוונים האפשריים במהלך מסעו?

11. יהיו  $n$  מעגלים במישור במצב כללי. טורבו החילזון מטייל על המעגלים, בהתחלה הוא מתחיל בללכת עם כיוון השעון ובכל פעם שהוא מגיע לנקודת חיתוך הוא עובר למעגל השני ומשנה את כיוונו (עם / נגד כיוון השעון). נניח שבטיולו הוא מכסה את כל המעגלים, הוכיחו כי  $n$  אי זוגי.

