

מחנה סתיו 2020

1. הוכיחו כי:
$$\sum_{k=0}^{2020} \frac{1}{3^{2^k} - 3^{-2^k}} < \frac{1}{2}$$

2. יהי a, b, c מספרים לא שליליים עבורם $ab + ac + bc \neq 0$. צ"ל:

$$\frac{ab}{2c^2+ab} + \frac{bc}{2a^2+bc} + \frac{ca}{2b^2+ca} \geq \frac{(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b-3abc)(ab+ac+bc)}{(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)(a+b+c)}$$

3. יהי a, b, c אורכי צלעות של משולש. הוכחו כי:

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}} + \sqrt{\frac{b(c+a)}{b^2+ac}} + \sqrt{\frac{c(a+b)}{c^2+ab}} \leq 3$$

4. יהי $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ אורכי צלעות של משולש. הוכיחו כי:

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}} + \sqrt{\frac{b(c+a)}{b^2+ac}} + \sqrt{\frac{c(a+b)}{c^2+ab}} \leq 3$$

5. יהי a, b, c מספרים ממשיים עבורם $a + b + c = ab + ac + bc$.

הוכיחו כי: $\sqrt{a^2 - a + 1} + \sqrt{b^2 - b + 1} + \sqrt{c^2 - c + 1} \geq a + b + c$

6. יהי a, b, c, d מספרים ממשיים. הוכיחו כי:

$$(a^2 - a + 2)(b^2 - b + 2)(c^2 - c + 2)(d^2 - d + 2) \geq (a + b + c + d)^2 + (a + b + c + d - 4)^2$$