

תרגיל גיאומטרי

1. נתון משולש ABC , שכל זוויותיו שונות ונמצאות בין 55° ל- 65° . ישר נקרא הוגן אם הוא מחלק את המשולש ABC לשני חלקים שווי שטח ושווי היקף. מצאו את הכמות של הישרים ההוגנים ואת נקודת המפגש שלהם.

2. נתון משולש חד-זוויות ABC . מעגל שמרכזו A ורדיוסו AB חותך את הישר AC בשתי נקודות אדומות, וגם מעגל שמרכזו C ורדיוסו BC חותך את הישר AC בשתי נקודות אדומות. זה מגדיר 4 נקודות אדומות על הישר AC , באופן דומה מוגדרות 4 נקודות אדומות על AB ועוד 4 נקודות האדומות על BC . נגיד שקיימים 2 מעגלים שמכילים את כל 12 הנקודות האדומות. האם המשולש ABC חייב להיות שווה שוקיים?

3. נתון משולש ABC שזוויותיו חדות. משקפים ישר כלשהו l ביחס לישרים AB, BC ו- CA . מקבלים ישרים l_1, l_2, l_3 , שיוצרים משולש Δ . מצאו את המקום הגיאומטרי של מרכז המעגל החסום של Δ , כאשר l משתנה והמשולש ABC נקבע מראש.

4. נתון מצולע משוכלל $A_1A_2 \dots A_{20}$. על המעגל החסום שלו נמצאת נקודה P . הראו כי

$$\sum_{i=1}^{10} \tan^2 \angle A_i P A_{i+10} < P$$

5. במחומש שווה צלעות $ABCDE$ מתקיים $\angle A \leq \angle B \leq \angle C \leq \angle D \leq \angle E$. האם הוא בהכרח משוכלל?

6. במשולש ABC שאינו שווה שוקיים הגבהים הם AA_1, BB_1, CC_1 וסימנו נקודות ההשקה של הצלעות עם המעגלים החסומים מבחון A_2, B_2, C_2 (שנמצאות על הצלעות עצמן ולא על המשכים). נתון שהישר B_1C_1 משיק למעגל החסום של המשולש. הראו כי הנקודות A_2, B_2, C_2 נמצאות על מעגל אחד.

7. המצולע $ABCDEFG$ משוכלל. הראו כי לכל נקודה X במישור

$$AX + CX + EX + GX \geq BX + DX + FX$$

8. במרחב תלת ממדי, 4 ישרים עוברים באותה נקודה, והזווית בין כל שני ישרים שווה ל- α . מצאו את כל האפשרויות עבור α .

בתאבון!

10.4. В остроугольном неравностороннем треугольнике ABC проведены высоты AA_1 , BB_1 , CC_1 и отмечены точки A_2 , B_2 , C_2 , в которых вневписанные окружности касаются сторон BC , CA , AB соответственно. Прямая B_1C_1 касается вписанной окружности треугольника. Докажите, что точка A_1 лежит на окружности, описанной около треугольника $A_2B_2C_2$.

<http://geometry.ru/olimp/2015/finsols.pdf>