

תרגיל ירדן

1. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ שמקיימות:

$$f(1) = 2, f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1$$

2. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ שמקיימות עבור כל מספר טבעי:

$$(n-1)^2 < f(n)f(f(n)) < n^2 + n$$

3. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ שמקיימות עבור כל $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(xf(y) + x) = xy + f(x)$$

4. בהינתן מספר חיובי n מצאו את כל הפונקציות הרציפות מהקטע $[0,1]$ לעצמו

$$\text{שמקיימות } f(0) = 0, f(1) = 1, f^{(n)}(x) = x \text{ לכל } 0 \leq x \leq 1.$$

5. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ שמקיימות עבור כל $x, y \in \mathbb{R}$:

$$(y+1)f(x) + f(xf(y) + f(x+y)) = y$$

6. נתונה פונקציה $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ שמקיימת:

$$f(1) = 2, f(2) = 1, f(3n) = 3f(n), f(3n+1) = 3f(n) + 2, f(3n+2) = 3f(n) + 1$$

מצאו עבור כמה ערכי $n \leq 2020$ מתקיים $f(n) = 2n$.

7. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ העולות (חזק) ככה ש:

$$f(x) + g(x) = 2x$$

לכל x , כאשר g היא ההופכית של f .

8. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימות עבור כל $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(y + f(x)) = f(y + x^2) + f(x^2 - f(x))$$

9. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+$ המקיימות עבור כל $x, y \in \mathbb{Q}^+$:

$$f(x^2 f(y)^2) = f(x)^2 f(y)$$

10. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימות עבור כל $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(xf(x) + y) + f(x)f(y) = x^2 + f(y) + f(xy)$$