ספירה כפולה

1. בצוות 15 חיילים, כל יום על הצוות לשלוח שלושה חיילים לתורנות מטבח. כעבור n ימים התברר שכל שני חיילים מהצוות היו ביחד בתורנות בדיוק פעם אחת. מצאו את n.

2. בממוצע יש לנו פחות חברים מלחברים שלנו:

נתון גרף, לכל קודקוד בגרף נגדיר $avg(v)$ להיות ממוצע הדרגות של החברים של v הוכיחו ש-

$$\sum_v deg(v) \leq \sum_v avg(v)$$

3. במישור נתונות n נקודות כך שאף שלוש לא על ישר אחד. הוכיחו כי יש לכל היותר $\frac{2}{3}(n^2-n)$ משולשים שקודקודיהם בנקודות הנתונות ושטחם 1.

4. בבית הספר n תלמידים וכל תלמיד נרשם למספר חוגים. בכל חוג יש לפחות שני תלמידים, בנוסף ידוע שאם יש שני תלמידים ההולכים לשני חוגים שונים אז כמות התלמידים הרשומים לחוג הראשון שונה מכמות התלמידים הרשומים לחוג השני. הוכיחו כי יש לכל היותר $(n-1)^2$ חוגים.

5. על לוח מלבני גדול הוצבו מספר צריחים. התברר שלכל צריח מספר הצריכים בשורה שלו שווה למספר הצריחים בעמודה שלו. הוכיחו כי כמות השורות שבהן יש לפחות צריח אחד שווה לכמות העמודות שבהן יש לפחות צריח אחד.

6. על לוח שח מלבני עם m שורות ו-n עמודות, כאשר $m<n$, הוצבו מספר צריחים כך שבכל עמודה עומד צריח אחד לפחות. הוכיחו שקיים צריח שבשורה שלו יש יותר צריחים מאשר בעמודה שלו.

7. במועדון n אנשים, לכל אחד יש בדיוק k חברים במועדון, לכל שני חברים יש בדיוק l חברים משותפים ולכל שני חברי מועדון שאינם חברים יש בדיוק m חברים משותפים. הוכיחו שמתקיים $m(n-k)+k=k(k-l)+m$.

8. בתחרות m מתחרים ו-n שופטים כאשר n אי-זוגי גדול מ-1. כל שופט נותן לכל מתחרה ציון שהוא 0 או 1. נניח שכל שני שופטים מסכימים על לכל היותר k מתחרים. הוכיחו ש-$\frac{k}{m} \geq \frac{n-1}{2n}$.

9. במישור נתונים n מעגלים ברדיוס 1. ידוע שכל מעגל נחתך עם לפחות מעגל אחד ואף שני מעגלים לא משיקים. הוכיחו שיש לפחות n נקודות חיתוך בין המעגלים (יתכן וכמה מעגלים עוברים בנקודה אחת).

10. נסמן ב-$t(n)$ את כמות המחלקים של n ונגדיר

$$\tau(n)=\frac{t(1)+t(2)+t(3)+\ldots+t(n)}{n}$$

הוכיחו ש-$|\tau(n)-\ln(n)|\le 1$.

11. לעיר מוריה הגיעו E אלפים ו-D גמדים. כל גמד הלך מכות עם לפחות אלף אחד וכל אלף עם לכל היותר 10 גמדים. בנוסף ידוע שאם גמד רב עם האלפים $e_1,\ldots,e_i$ אז כל אחד מבין $e_1,\ldots,e_i$ רב עם פחות מ-i גמדים. הוכיחו כי $D\le \frac{10}{11}E$.

12. נתונות שתי סדרות של מספרים ממשיים $x_1,x_2,\ldots,x_n$ ו-$y_1,y_2,\ldots,y_n$. איילה ממלאת טבלה $n\times n$ באופן הבא: אם x_i+y_j שלילי אז במקום ה-(i,j) בטבלה היא רושמת 0 ואם x_i+y_j אי-שלילי היא רושמת 1. ברווז גם הוא מילא טבלה $n\times n$ באפסים ואחדים ודאג שהסכום בכל שורה וכל עמודה בטבלה שלו יהיה שווה לסכום בטבלה של איילה. הוכיחו כי הטבלה של ברווז זהה לטבלה של איילה.

13. באליפות היקום בשחמט משתתפים בני אדם וחייזרים, כל אדם מכיר לפחות חיזר אחד. הוכיחו כי ניתן למצוא קבוצת מתחרים הכוללת לפחות מחצית מהמתחרים כך שכל אדם בקבוצה יכיר כמות אי-זוגית של חייזרים בקבוצה.

14. הוכיחו כי בגרף עם n קודקודים שאין בו מעגלים מאורך 4 יש לכל היותר $\frac{n}{4}(1+\sqrt{4n-3})$ קשתות.

15. נתון גרף עם $2n$ קודקודים ו-n^2 קשתות. זוג קודקודים $\{u,v\}$ נקרא קרוב אם יש בגרף קודקוד שהוא שכן גם של u וגם של v. הוכיחו כי בגרף יש לפחות $2\binom{n}{2}$ זוגות קרובים.

16. נתונות $A_1,A_2,\ldots,A_m$ תתי קבוצות של $\{1,2,\ldots,n\}$ שגודלן הממוצע הוא לפחות $\frac{n}{a}$. הוכיחו שאם

$m\ge 2a^2$ אז אפשר למצוא שתי קבוצות A_i,A_j שהחיתוך שלהן הוא לפחות מגודל $\frac{n}{2a^2}$.