תרגיל קומבינטורי

1. נתון ריבוע 11×11 שכל משבצותיו צבועות בלבן. בכל מהלך, בוחרים 4 משבצות לבנות שמרכזיהן מהווים ריבוע שצלעותיו מקבילות לצירים, וצובעים מתוכן שתי פינות נגדיות בשחור. התהליך מסתיים כאשר לא ניתן לבצע מהלך. מצאו את המספר המרבי של משבצות שחורות שיכולות להיות בסוף התהליך.

2. לוח 999×999 צבוע בלבן ואדום. נסמן ב-T את מספר השלשות הסדורות של משבצות (C_1,C_2,C_3) בלוח, שתי הראשונות באותה שורה, שתי האחרונות באותה עמודה, כך ש-C_1 ו-C_3 לבנות ו-C_2 אדומה. מצאו את הערך האפשרי המרבי של T.

3. במינקלנד יש מספר ערים, חלקן חוברו בזוגות בכבישי נסיעה דו-כיווניים. נניח שניתן להגיע מכל עיר לכל עיר ב-100 נסיעות לכל היותר, ובנוסף ניתן להגיע מכל עיר לכל עיר במספר זוגי של נסיעות. מצאו את המספר הקטן ביותר d כך שניתן לומר בוודאות שאפשר להגיע מכל עיר לכל עיר במספר זוגי של נסיעות שאינו עולה על d.

4. יהי $r\ge 2$ שלם חיובי. נתון אוסף F של אינסוף קבוצות שונות בגודל r, אף שתיים מתוכן אינן זרות. הוכיחו כי קיימת קבוצה בגודל $r-1$ שנחתכת עם כל קבוצה ב-F.

5. נתונה קבוצה S בגודל n^2+n-1 עבור שלם חיובי n. נניח שתתי הקבוצות בגודל n של S חולקו לשתי מחלקות. הוכיחו כי יש n קבוצות זרות בזוגות השייכות לאותה מחלקה.

6. יהיו m,n שלמים חיוביים שעבורם $m\le n$. נתונה קבוצה S של n מספרים שלמים. הוכיחו כי קיימות לפחות 2^{n-m+1} תתי קבוצות שונות של S שסכום האיברים בהן מתחלק ב-m (כולל הקבוצה הריקה).

7. יהי $n\ge 2$ שלם חיובי. בלוח $n\times n$ רשומים כל המספרים מ-1 עד n^2 פעם אחת בדיוק. הוכיחו כי קיימות שתי משבצות בעלות צלע משותפת שהפרש המספרים הרשומים בהן הוא לפחות n.

8. דליה וצבי משחקים משחק על הציר הממשי, שתחילה צבוע כולו בלבן. לצבי יש דלי של דיו שתכולתו 4 ליטר דיו שחור. p ליטרים של דיו מספיקים כדי להשחיר קטע סגור באורך p. בכל סיבוב, דליה בוחרת מספר טבעי m ומקצה $\frac{1}{2^m}$ ליטר דיו מהדלי. צבי בוחר שלם אי שלילי k ומשחיר את הקטע $\left[\frac{k}{2^m},\frac{k+1}{2^m}\right]$ (שאולי חלק ממנו הושחר קודם לכן). המטרה של דליה היא להגיע למצב שהדלי ריק והקטע $[0,1]$ עוד לא לגמרי שחור. האם יש אסטרטגיה שבאמצעותה דליה יכולה לנצח במספר סופי של מהלכים?

9. נגדיר משולש אנטי-פסקל בתור מערך מספרים בצורת משולש שווה-צלעות בו כל מספר שאינו בשורה התחתונה שווה לערך המוחלט של הפרש שני המספרים שמתחתיו. לדוגמה, המערך הבא הוא משולש אנטי-פסקל עם ארבע שורות שמכיל את כל השלמים מ-1 עד 10.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

האם קיים משולש אנטי-פסקל עם 2018 שורות שמכיל את כל השלמים מ-1 עד $1+2+\cdots+2018$?

בתאבון!