

## תרגיל קומבי

1. מאה קלפים מוספרו על ידי מספרים מ-1 עד 100, והוכנסו ל-3 קופסאות, לפחות קלף אחד בכל קופסה. לפי הסכום של שני קלפים אקראיים מקופסאות שונות, ניתן לגלות מהי הקופסה השלישית. בכמה דרכים ניתן לעשות את החלוקה?

2. מהו המספר הקטן ביותר של סדרות הנדסיות שהאיחוד שלהם מכיל את כל המספרים השלמים מ-1 עד 100 כולל?

3. האם קיימת תת-קבוצה  $A$  בקבוצת השלמים החיוביים  $\mathbb{Z}_{>0}$  כך שלכל קבוצה אינסופית  $S$  של מספרים ראשוניים, קיימים שני מספרים  $m \in A$  ו- $n \notin A$  שכל אחד מהם הוא מכפלה של  $k$  איברים שונים של  $S$  עבור איזשהו  $k \geq 2$ .

4. א. הראו שניתן לחלק את קבוצת הרציונליים החיוביים  $\mathbb{Q}_{>0}$  לשלוש תתי-קבוצות זרות  $A, B, C$  כך שמתקיימים התנאים:  $BA = B$ ,  $B^2 = C$ ,  $BC = A$ , כאשר הסימון  $HK$  לכל שתי קבוצות  $H$  ו- $K$  מתייחס לקבוצת המכפלות  $\{hk \mid h \in H, k \in K\}$ , וכש- $H^2$  מסמן את  $HH$ .

ב. הראו שכל החזקות השלישיות של מספרים ב- $\mathbb{Q}_{>0}$  שייכות ל- $A$  לכל חלוקה כזאת.

ג. מצאו חלוקה שמקיימת את התנאים, ובנוסף לאף מספר חיובי שלם  $n \leq 34$  לא יתכן ש- $n$  ו- $n+1$  שייכים ל- $A$  בו-זמנית.

5. האם קיים  $n > 1$  טבעי שמקיים את התנאי הבא: ניתן לחלק את קבוצת השלמים החיוביים ל- $n$  מחלקות לא ריקות, כך שאם לוקחים  $n-1$  מספרים שכולם ממחלקות שונות, אז סכומם לא נמצא באותה מחלקה עם אף אחד מהם?

6. האם ניתן לחלק את השלמים החיוביים לשתי מחלקות כך ששני התנאים מתקיימים:

- לכל ראשוני  $p$  ולכל טבע  $n$  המספרים  $p^n, p^{n+1}$  ו- $p^{n+2}$  לא כולם באותה המחלקה,
- אין סדרה הנדסית אינסופית באף במחלקה.

7. על הלוח מספרים שלמים מ-1 עד 100 (כולל). צבי רוצה לצבוע  $N$  מספרים בכחול, כך שכל סדרה חשבונית המורכבת מ-10 מספרים שרשומים על הלוח תכיל מספר כחול. עבור איזה  $N$  זה מתאפשר?

בתאבון!