

מטבעות וניחושים

1. במישור מצויר מצולע קמור עם 100 צלעות. איילה בוחרת נקודה בלתי נראית (לא על שפת המצולע) וברווז מנסה לגלות האם הנקודה בתוך המצולע או בחוץ. בכל מהלך של ברווז הוא מעביר ישר ושואל את איילה באיזה צד של הישר נמצאת הנקודה שנבחרה. כמה מהלכים הוא צריך?

2. במרחב נתונה קוביה. איילה בוחרת נקודה בלתי נראית (לא על שפת הקוביה) וברווז מנסה לגלות האם הנקודה בתוך הקוביה או בחוץ. בכל מהלך של ברווז הוא בוחר מישור ושואל את איילה באיזה צד של המישור נמצאת הנקודה שנבחרה. כמה מהלכים הוא צריך?

3. תלת-מאזניים הן מכשיר ששוקל שלוש קבוצות של משקולות ברוזמנית, ומשווה בין כל שתיים מהן. נתונות 12 משקולות שמשקליהן 1, 2, ..., 12. על המשקולות רשומים המספרים 1, 2, ..., 12, לאו דווקא באותו הסדר. ידוע כי יש לפחות 10 משקולות שהמספר הרשום עליהן שווה למשקלן. מצא את המשקל של כל אחת מהמשקולות בעזרת 2 שקילות על תלת-מאזניים.

4. בשורה 28 מטבעות, מתוכם K מטבעות מזויפים ברצף, והמטבעות האחרים אמיתיים. מותר לבחור כל תת-קבוצה של מטבעות ולשאול כמה מתוכם מזויפים. כמה מהלכים צריך לעשות בשביל למצוא את כל המטבעות המזויפים
א. אם $K=4$?
ב. אם $K=2$?

5. איימי ורוזה משחקות משחק. איימי בוחרת שני מספרים בין 1 ל-100. רוזה יכולה לבחור כל פעם תת-קבוצה של $\{1, 2, \dots, 100\}$, ואיימי אומרת לה האם בתת-קבוצה הזו יש מספר זוגי או אי זוגי של מספרים שהיא בחרה. מה המספר המינימלי של שאלות שרוזה תצטרך, כדי לדעת בוודאות מהם המספרים שאימי בחרה?

6. נתונים 6 מטבעות שאחד מהם מזויף (משקלו שונה ממשקל המטבעות התקינים, אבל המשקלים לא ידועים). בעזרת מאזניים שמראים את המשקל הכולל של המונח עליהם, כיצד ניתן לאתר את המטבע המזויף ב-3 שקילות?

האם אפשר לפתור את אותה השאלה עבור 7, 8 או 9 מטבעות?

7. איילה בוחרת מספר מ-1 עד 1000, וברווז מנסה לנחש אותו, כאשר מותר לאיילה לשקר פעם אחד לכל היותר. כמה שאלות של "כן" או "לא" ברווז יצטרך לשאול בשביל לנחש את המספר?

8. רוי בוחר מספר בין 1 ל- n (כולל), ושרון מנסה לנחש אותו. היא יכולה לשאול את רוי שאלות של "כן" ו"לא" לגבי המספר, ורוי עונה על השאלות שלה. אם רוי משקר פעמיים ברצף האוזניים שלו מסמיקות באופן מובהק (ושרון יכולה להבחין בזה). המשחק מסתיים כאשר שרון יכולה לכתוב על דף נייר שני מספרים, שאחד מהם בוודאות מספר שרוי בחר. המטרה של רוי היא לשקר כמה שיותר פעמים לפני שהמשחק מסתיים. הראו ששרון מסוגלת לגרום לכך שרוי ישקר לא יותר מאשר 13 פעמים:

א. כאשר $n=96$. ב. כאשר $n=128$. ג. כאשר $n=512$.

9. איילה וברונו משחקים במשחק שקרים וניחושים. כללי המשחק תלויים בשני מספרים שלמים חיוביים k ו- n הידועים לשני השחקנים. בתחילת המשחק איילה בוחרת מספרים שלמים x ו- N עבורם $1 \leq x \leq N$. איילה מגלה לברונו בכנות את הערך של המספר N ושומרת את הערך של x בסוד. ברונו מנסה לגלות מידע לגבי x באמצעות שאלות מהסוג הבא: בכל שאלה ברונו מגדיר קבוצה S כלשהי של שלמים חיוביים (תיתכן גם קבוצה שהוגדרה בשאלות קודמות), ושואל את איילה האם x שייך לקבוצה S . ברונו רשאי לשאול כל כמות שאלות מסוג זה כרצונו. לאחר כל שאלה, איילה חייבת לענות מיידית באמצעות "כן" או "לא", אבל היא רשאית לשקר. אין מגבלה על כמות התשובות השקריות שלה, אך בכל $k+1$ תשובות עוקבות, לפחות אחת חייבת להיות כנה.

לאחר שברונו סיים לשאול את כל השאלות שהוא רוצה, הוא חייב להגדיר קבוצה X של מספרים שלמים חיוביים, בעלת n איברים לכל היותר. ברונו מנצח אם x שייך ל- X ; אחרת, ברונו מפסיד. הוכיחו כי:

- א. אם $n \geq 2^k$ אז ברונו יכול להבטיח לעצמו ניצחון.
 ב. לכל k גדול מספיק, קיים $n \geq 1.99^k$ שלם עבורו ברונו לא יכול להבטיח לעצמו ניצחון.

בתאבון!