השקפת עולם

1. נתון שולחן ביליארד בצורה של מלבן 7 על 9, שיש לו כיסים בקודקודים. מהפינה שולחים כדור לאורך חוצה הזווית של המלבן. מה המרחק שיעבור הכדור עד שיכנס לכיס? כמה פעמים הכדור יפגע בקירות של השולחן?

2. שתי מראות מישוריות אינסופיות יוצרות זווית בגודל α. קרן אור מתקדמת במקביל למראה ראשונה ופוגעת במראה שנייה. כמה פעמים הקרן תפגע בשתי המראות בסה"כ?

3. נתון שולחן ביליארד בצורה של משולש שזוויותיו 30°, 60°, 90° ויש לו כיסים בקודקודים. מהזווית של 30° שולחים כדור לאורך התיכון של המשולש. כמה פעמים יתנגש הכדור בקירות עד שהוא יכנס לאיזשהו כיס?

4. מהו ההיקף הכי קטן עבור מרובע קמור, שיש לו קודקוד על כל צלע של מלבן נתון?

5. נתון משולש ישר זווית. מצאו את המסלול הקצר ביותר, שמתחיל על היתר, עובר לפחות בנקודה אחת על כל ניצב וחוזר ליתר.

6. במשולש ABC נקודת חיתוך הגבהים היא H, מרכז המעגל החוסם O, ורדיוס המעגל החוסם R. ניקח נקודה כלשהי D על אחת מצלעות המשולש. הוכיחו כי $OD+HD\ge R$.

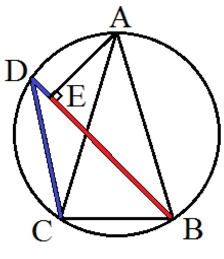
7. ABCD הוא דלתון, $AB = AD$, $CB = CD$, הזוויות B ו-D ישרות. נקודות K ו-M נמצאות על הצלעות BC, CD בהתאמה, כך ש-$\sphericalangle MAK=\frac{1}{2}\sphericalangle BAD$.

א. הוכיחו כי $BK + MD = MK$.

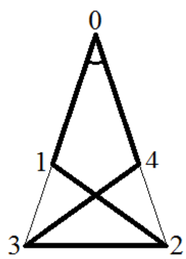
ב. הוכיחו כי המרחק מ-A לישר MK שווה ל-AB.

8. במשולש ABC הזווית B ישרה, $AB = BC$. נקודות K, L נמצאות על הצלע AC, כאשר L בין K ל-C. נתון כי הזווית KBL שווה 45°. הוכיחו כי $AK^2 + LC^2 = KL^2$.

9. א. משולש ABC שווה שוקיים: $AB=AC$. נקודה D שנמצאת מחוץ לישר BC מקיימת $\sphericalangle ADB+\sphericalangle ADC=180^\circ$. הוכיחו כי A, B, C, D נמצאות על מעגל אחד.

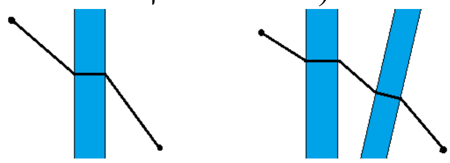


ב. במצב של הסעיף הקודם ($AB=AC$, וגם D על אותו מעגל), נניח כי E נקודה על צלע BD כך ש-AE מאונך ל- BD. הוכיחו כי הנקודה E מחלקת את הקו השבור BDC לשני חלקים שווי-אורך.

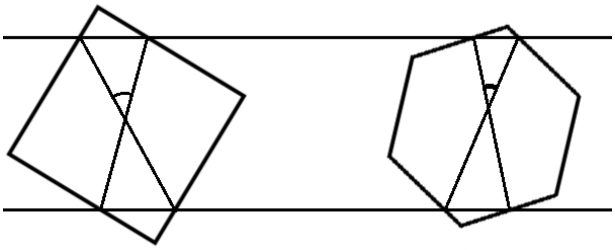


10. בקו שבור סגור $A_0A_1A_2...A_{2n}A_0$ כל הקטעים הם באותו האורך, וכל הקודקודים שלו שונים. ידוע בנוסף כי כל הנקודות עם אינדקס זוגי נמצאות על קרן אחת שמתחילה ב-A_0, וכל הנקודות עם אינדקס אי-זוגי נמצאות על קרן אחת שמתחילה ב-A_0. מצאו את הזווית בין הקרניים. התשובה עלולה להיות תלויה ב-n.

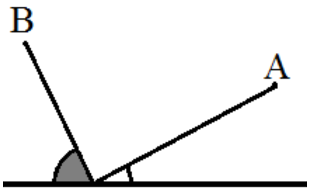
11. א. צריך לחבר שתי נקודות בצדדים שונים של הנהר (שהוא פס בין שני ישרים מקבילים) במסלול הקצר ביותר. בשביל זה בונים גשר במאונך לנהר. איפה צריך להיות הגשר?
ב. אותה שאלה, אבל הנקודות מופרדות על ידי שני נהרות.



12*. בציור מופיעים פס אופקי, ריבוע ומשושה משוכלל, העובי של כולם זהה (כאשר העובי הוא מרחק בין צלעות מקבילות). מצאו את הזוויות המסומנות.



13*. נתון ישר ונקודות A, B באותו צד שלו. כיצד לבנות מסלול AXB, כאשר X על הישר הנתון כך שזווית הפגיעה תהיה חצי מזווית ההחזרה?



14*. נתון משולש חד זוויות ABC. נתבונן בשלשות של נקודות P, Q, R שנמצאות על BC, AC, AB בהתאמה. הוכיחו ש-PQ + QR + RP יהיה מינימלי כאשר AP, BQ, CR הם גבהי המשולש.

15*. על במת קרקס עגולה שרדיוסה 10 מטרים רץ אריה. האריה רץ בקווים ישרים, אבל מדי פעם הוא פונה. הוכיחו שעל מנת לרוץ 30 קילומטרים הוא יצטרך לעשות פניות עם סכום זוויות שהוא לפחות 2998 רדיאנים.

בתאבון!