

תרגיל "אלגברי"

במשוואות ומערכות משוואות שצריך לפתור x, y, \dots הם משתנים, a, b, \dots הם פרמטרים.

1. חשבו את המינימום של $\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 - 20x + 109}$.

2. בהינתן $x^2 + u^2 = y^2 + v^2 = z^2 + w^2 = 1$, הראו כי $xvw + yuw + zuv \leq xyz + 1$.

3. פתרו את המשוואה:

$$\sqrt{x^2 + a^2 - ax \cdot \sqrt{3}} + \sqrt{y^2 + b^2 - by \cdot \sqrt{3}} + \sqrt{x^2 + y^2 - xy \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

4. פתרו את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x = \sqrt{z^2 - a^2} + \sqrt{y^2 - a^2} \\ y = \sqrt{x^2 - b^2} + \sqrt{z^2 - b^2} \\ z = \sqrt{y^2 - c^2} + \sqrt{x^2 - c^2} \end{cases}$$

5. מספרים ממשיים x, y, z מקיימים

$$x^2 + xy + y^2 = y^2 + yz + z^2 = z^2 + zx + x^2 = a^2$$

האם ניתן לחשב את $x + y + z$?

6. נתונה מערכת משוואות:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 9 \\ x^2 + xz + z^2 = 16 \\ y^2 + yz + z^2 = 25 \end{cases}$$

כאשר x, y, z חיוביים.

מצאו את $x + y + z$ ואת $xy + xz + yz$.

7. מצאו מספרים חיוביים $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10}$ כך ש- $(x_1 + \dots + x_k)(x_k + \dots + x_{10}) = 1$

לכל $1 \leq k \leq 10$.

8. פתרו את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} z^2 - xy = c \\ x^2 - yz = a \\ y^2 - zx = b \end{cases}$$

9. מצאו את כמות הזוגות של מספרים טבעיים (m, n) ששניהם לא עולים על 1000

$$\text{ומתקיים } \frac{m}{n+1} \leq \sqrt{2} \leq \frac{m+1}{n}$$

10. נתונים שישה מספרים שלמים: $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ שמקיימים $\gcd(a_1 - a_2, b_1 - b_2) = \gcd(a_1 - a_3, b_1 - b_3) = \gcd(a_2 - a_3, b_2 - b_3) = 1$.

מסתבר שלמערכת משוואות אי-השוויונים

$$\begin{cases} (a_1 - x)(b_2 - y) > (a_2 - x)(b_1 - y) \\ (a_2 - x)(b_3 - y) > (a_3 - x)(b_2 - y) \\ (a_3 - x)(b_1 - y) > (a_1 - x)(b_3 - y) \end{cases}$$

יש פתרון אחד לפחות במספרים שלמים, ולכל פתרון בשלמים למערכת מתקיים $x = y$. מצאו את כל הערכים האפשריים של $a_1 - b_1 + a_2 - b_2 + a_3 - b_3$.

11. מספרים חיוביים $a, b, c, d > 0$ מקיימים $\frac{a}{c} = \frac{2c+d}{2a-b}$ וגם $\frac{b}{d} = \frac{2d+c}{2b-a}$. מצאו את

$$\frac{ab+cd}{ad+bc} \text{ ערכו של היחס}$$

12. סדרות לא קבועות של מספרים חיוביים מקיימת:

$$\begin{cases} 3b_{2n} - 7b_{2n+1} + 5b_{2n+2} = 1 \\ 5b_{2n-1} - 7b_{2n} + 3b_{2n+1} = 1 \end{cases} \text{ ב.} \quad \begin{cases} 3a_{2n} - 5a_{2n+1} + 4a_{2n+2} = 12 \\ 4a_{2n-1} - 5a_{2n} + 3a_{2n+1} = 12 \end{cases} \text{ א.}$$

הראו שהסדרות מחזורית ומצאו את אורכי המחזורים.

13. יוסי בחר מספר חיובי t . על הלוח רשומים מספרים a, b, c . בכל שלב מחליפים את 3 המספרים שרשומים על הלוח במספרים

$$\frac{1-a+(t-1)c}{1+t-a-b-c}, \frac{1-b+(t-1)a}{1+t-a-b-c}, \frac{1-c+(t-1)b}{1+t-a-b-c}$$

עבור איזו ערכים של t התהליך בהכרח מחזורי?

14. נתונה סדרה אינסופית $x_1, x_2, x_3, \dots \in (0, 1)$ המקיימת

$$x_i(\varphi^2 - x_{i+1})(\varphi^2 - x_{i+2}) = (x_i + \varphi)(x_{i+1} + \varphi)(1 - x_{i+2})$$

לכל $i \geq 1$, כאשר $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. הראו כי הסדרה מחזורית, כלומר קיים n חיובי שלם כך

$$x_{i+n} = x_i \text{ ש-} \prod_{i=1}^n x_i = \prod_{i=1}^n (1 - x_i) \text{ והראו כי } i, \text{ עבור אותו } n.$$

בתאבון!