תרגיל אלגברי

1. נתון מספר ממשי חיובי a . מצאו את המקסימום של

$$\sum_{i=1}^{n}(a-a_1)(a-a_2)(a-a_3)...(a-a_{i-1})a_i(a-a_{i+1})...(a-a_n)$$

עבור מספרים ממשיים $0\le a_i\le a$.

2. נגדיר $f(x)=x^2-5780x+2020$. הוכיחו כי למשוואה

$$f\Bigg(f\bigg(f\bigg(f\Big(f\Big(f\big(f(x)\big)\Big)\Big)\bigg)\bigg)\Bigg)=0$$

יש פתרון ממשי.

3. תהא $0<a_0<a_1<a_2<a_3<...$ סדרת מספרים שלמים. הוכיחו כי קיים $n>0$ יחיד עבורו $a_n<\dfrac{a_0+a_1+a_2+...+a_n}{n}\le a_{n+1}$.

4. סדרה אינסופית של מספרים חיוביים מתחילה ב-$x_0=1$ מקיימת $x_0\ge x_1\ge x_2\ge ...$.

א. הראו כי קיים n עבורו $\dfrac{x_0^2}{x_1}+\dfrac{x_1^2}{x_2}+\dfrac{x_2^2}{x_3}+...+\dfrac{x_{n-1}^2}{x_n}\ge 3.999$.

ב. מצאו סדרה עבורה $\dfrac{x_0^2}{x_1}+\dfrac{x_1^2}{x_2}+\dfrac{x_2^2}{x_3}+...+\dfrac{x_{n-1}^2}{x_n}<4$ לכל n .

5. מצאו את כל הפתרונות החיוביים למערכת:

$$\begin{cases}(x_1^2-x_3x_5)(x_2^2-x_3x_5)\le 0\\(x_2^2-x_4x_1)(x_3^2-x_4x_1)\le 0\\(x_3^2-x_5x_2)(x_4^2-x_5x_2)\le 0\\(x_4^2-x_1x_3)(x_5^2-x_1x_3)\le 0\\(x_5^2-x_2x_4)(x_1^2-x_2x_4)\le 0\end{cases}.$$

6. מצאו את כל הפתרונות בשלמים עבור המערכת

$$\begin{cases}a+b+c+d=0\\a^3+b^3+c^3+d^3=24\end{cases}.$$

7. פתרו את המשוואה: $\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$.

בתאבון!