

מעגל תשע הנקודות

1. נתון משולש ABC בו מפגש הגבהים יסומן H . הוכיחו ששלושת השיקופים של H ביחס לצלעות המשולש נמצאים על המעגל החוסם של המשולש.
2. נתון משולש ABC בו מפגש הגבהים יסומן H . הנקודה הנגדית לקודקוד A על המעגל החוסם של המשולש תקרא A' . הוכיחו שאמצע הקטע $A'H$ הוא גם אמצע הצלע BC .
3. נתון משולש ABC בו מפגש התיכונים יסומן M , ועקב הגובה מ- A יסומן D . הנקודה X היא הנקודה על המעגל החוסם של המשולש ABC שנמצאת על הישר MD , כך ש- D נמצאת בין M ל- X . הראו שהזוויות $\sphericalangle CXD$ ו- $\sphericalangle BCA$ שוות זו לזו.
4. במשולש ABC אמצעי הצלעות (מול הקודקודים A, B, C בהתאמה) הם M_1, M_2, M_3 , ועקבי הגבהים הם H_1, H_2, H_3 (בהתאמה). הראו שהמעגל החוסם של המשולש AH_2H_3 משיק לישרים M_1H_2 ו- M_1H_3 .
5. נתון מעגל עם קוטר XY ושתי נקודות Z ו- W שנמצאות על המעגל מאותו הצד של הקוטר XY . הישרים XZ ו- YW נפגשים בנקודה S והמשיקים למעגל בנקודות Z ו- W נפגשים בנקודה T . הוכיחו שהישר ST מאונך לקוטר XY .
6. נתון משולש ABC בו עקבי הגבהים מהקודקודים A, B, C יקראו D, E, F בהתאמה, ומפגש הגבהים יסומן H . נסמן את 2 נקודות החיתוך של המעגלים החוסמים של המשולשים DEF, BCH ב- X, Y . הוכיחו כי $AX = AY$.
7. במשולש ABC , מרכז המעגל החוסם יסומן I ומרכזי המעגלים החסומים מבחוץ יסומנו I_A, I_B, I_C . מצאו את היחסים בין הרדיוסים של המעגלים החסומים במשולשים $ABC, I_A I_B I, I_A I_B I_C$.
8. בסימונים של השאלה הקודמת, נסמן ב- B את מרכז המעגל החוסם את המשולש $I_A I_B I_C$, נסמן ב- O את מרכז המעגל החוסם של המשולש ABC , ונסמן ב- I את מרכז המעגל החוסם במשולש ABC . הוכיחו שהנקודות B, O, I נמצאות על ישר אחד.
9. נתונות 4 נקודות A, B, C, D שאף 3 מהן לא נמצאות על ישר אחד. הוכיחו שמעגלי אוילר של המשולשים ABC, BCD, CDA, DAB נפגשים בנקודה אחת.
10. בסימונים של שאלה 4: נגיד שהישר H_2H_3 פוגש את המשך הצלע BC בנקודה U , הישר H_1H_3 פוגש את המשך הצלע AC בנקודה V , והישר H_1H_2 פוגש את המשך הצלע AB בנקודה W . הראו כי הנקודות U, V, W נמצאות על ישר אחד שמאונך לישר אוילר.

11. המרובע $ABCD$ חסום במעגל, ואלכסוניו AC ו- BD מאוכים זה לזה ונפגשים בנקודה X .
אמצעי הצלעות AB, BC, CD, DA יסומנו M_1, M_2, M_3, M_4 בהתאמה, ועקבי האנכים מ- X
לצלעות יסומנו H_1, H_2, H_3, H_4 בהתאמה.

הוכיחו ש-8 הנקודות $M_1, H_1, M_2, H_2, M_3, H_3, M_4, H_4$ נמצאות כולן על מעגל אחד.