צביעת טבלה בשלושה צבעים

אביאל בוג, לב רדזיווילובסקי

נתחיל בחידה, שידועה בתור דוגמה לשימוש בשובך היונים. מלבן 3×7 מחולק למשבצות 1×1, וכל משבצת צבועה באחד משני צבעים: כחול או לבן. הוכיחו שניתן לבחור תת-מלבן שמורכב ממשבצות, שגם אורכו וגם רוחבו הם לפחות 2, ושכל המשבצות הפינתיות שלו באותו צבע.

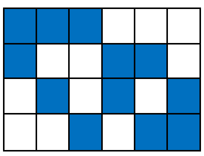
כמובן אפשר לחשוב על גרסאות אחרות של חידה זאת. למה 3×7? למה לא 3×6? עבור איזה זוגות של מספרים m ו-n נוכל להבטיח שבתוך טבלה $m\times n$ קיים תת-מלבן שכל משבצות הפינתיות שלו באותו צבע? כנראה שאם הטבלה היא מספיק גדולה, נוכל למצוא בה כל דבר ובפרט גם מלבן כזה, אבל מה זאת אומרת מספיק גדולה?

תשובה לשאלה זאת מורכבת ממספר סעיפים:

א. אם $m=2$ או $n=2$ אז קיימת צביעה ללא תת-מלבנים כאלה.
ב. בטבלה 4×6 גם קיימת צביעה.
ג. עבור טבלה 3×7, לכל צביעה יש תת-מלבן עם פינות באותו צבע.
ד. עבור טבלה 5×5, לכל צביעה יש תת-מלבן עם פינות באותו צבע.

קל לראות שמהטענות האלו מתקבלת תשובה לכל m ו-n. למשל, במלבנים 3×6 או 5×4 קיימת צביעה, שניתן לגזור מהצביעה של מלבן 4×6 על ידי מחיקה של שורה אקראית או עמודה אקראית. קל לראות שאם מלבן לא מוכל במלבן 4×6 או 6×4 ויש לו מעל 2 שורות ומעל 2 עמודות, הוא מכיל תת-מלבן 3×7, 7×3 או 5×5.

כאשר יש שתי שורות בלבד אפשר לצבוע שורה אחת בלבן ושנייה כחול, ולא יהיה תת-מלבן שכל פינותיו באותו צבע. הדוגמה של 4×6 מבוססת על רעיון יותר מעניין. ניתן לחלק את הקבוצה $\{1,2,3,4\}$ לשני זוגות, זוג כחול וזוג לבן, ב-6 דרכים. אנחנו נצייר בכל עמודה חלוקה שונה, ואז לא יהיה באף עמודה מלבן כנדרש. התוצאה בציור.



נשארו עוד שני סעיפים בתרגיל. נתבונן בטבלה שבה יש 3 שורות ו-7 עמודות. כל עמודה צבועה באחת מבין 8 דרכים (למשל כחול-כחול-לבן או כחול-לבן-כחול, כאשר הצבעים של המשבצות כתובים מלמעלה למטה). אבל בכל מקרה בכל עמודה יש שתי משבצות עם אותו צבע. אם יש שתי עמודות שצבועות באותו אופן, אז זה כבר נותן את המלבן הרצוי. לו היו לנו 9 עמודות, זה כבר היה מסיים את ההוכחה.

אם יש עמודה שבה כל המשבצות לבנות, כל עמודה נוספת שיש בה רוב של משבצות לבנות תגרום ליצירת מלבן. לכן אם יש עמודה לבנה ואין מלבן, יש רק עמודות מ-5 סוגים, ואז אם יש 7 עמודות זה כבר מבטיח מלבן רצוי. לכן אם אין מלבן רצוי, אנחנו לא

יכולים לצבוע עמודה לגמרי בלבן. באופן דומה לא יכולה להיות עמודה הצבועה כולה בכחול. לכן מותר להשתמש רק ב-6 דרכי צביעה לעמודות, ולכן יש שתי עמודות הצבועות באותו אופן, ולכן בהכרח יש מלבן רצוי.

נשאר המקרה של 5×5. לכל עמודה נספור את כמות זוגות המשבצות בעמודה שהן באותו צבע. יכול להיות שיש 5 משבצות באותו צבע ואז 10 זוגות. אם יש 4 משבצות בצבע אחד ומשבצת נוספת בצבע אחר, יש 6 זוגות. אם יש 3 משבצות בצבע אחד ושתי משבצות בצבע אחר, אז יש 3 זוגות של הצבע הראשון וזוג משבצות בצבע אחר, בסה"כ 4 זוגות. בכל מקרה, יש לפחות 4 זוגות.

נגיד שעמודה k ***מחברת*** את השורה ה-i והשורה ה-j אם הנציגים של שורות אלה בעמודה הזאת הם באותו צבע. אם הם בצבע לבן, נגיד שעמודה k מחברת אותן בלבן, ואם הם בצבע כחול, נגיד שהיא מחברת את השורות בכחול. מותר לחבר כל זוג שורות רק פעם אחת בלבן ופעם אחת בכחול – אם מחברים אותו פעמיים באותו הצבע, אז כבר יש מלבן. יש 10 זוגות של שורות, לכן מותרים 20 חיבורים כאלה. אבל ראינו שכל עמודה מחברת לפחות 4 זוגות של שורות. לכן אם יש 5 עמודות, יש לנו בדיוק 20 חיבורים בין שורות.

לכן חייבים שיהיו בדיוק 20 חיבורים, וכל אי-שוויון שדיברנו עליו הופך לשוויון. בפרט, בכל עמודה יש 3 משבצות בצבע אחד ושתי משבצות בצבע אחר. לכן כמות זוגות השורות שמחוברים על ידי כל עמודה בלבן ובכחול נבדלת ב-2. כאשר מחברים חמישה מחוברים שכולם ±2 עם סימנים כלשהם, לא מקבלים 0 (למשל בגלל שארית בחלוקה ל-4), ולכן יש מספר שונה של חיבורים בכחול ובלבן, כלומר יש צבע שבו יש יותר מ-10 חיבורים של שורות, ולכן יש מלבן מהסוג הרצוי.

כעת פתרנו לגמרי את שאלת שני הצבעים. השאלה לא מאוד קשה, אבל משעשעת. מי שאוהב שאלות מסוג זה, אולי היה רוצה לפתור עוד שאלה כזאת, והדבר הטבעי הוא להגדיל את כמות הצבעים ל-3. ובכן, יש טבלה $m\times n$ שכל משבצת שלה צבועה באחד מ-3 צבעים: לבן, כחול או אדום. האם בהכרח קיים תת-מלבן שכל המשבצות הפינתיות שלו באותו צבע? כמובן, התשובה תלויה ב-m וב-n – אם אלה מספרים גדולים, אז בהכרח קיים מלבן ואם המספרים לא גדולים מספיק, אז יש צביעה. אבל מה זה גדולים מספיק?

המשך המאמר מתאר את הפתרון המלא לשאלה של 3 צבעים. כמובן, זו לא שאלה אינסופית: יש מספר "מצבים קיצוניים" כמו שקודם היו 4×6, 3×7 ו-5×5, כלומר מלבנים עם הכי הרבה שורות ועמודות כך שעדיין יש צביעה ומלבנים עם הכי מעט שורות ועמודות שבהם כבר אין צביעה. כמובן שגם הבניות וגם ההוכחות יותר קשות במקרה של 3 צבעים, ויש יותר מצבים קיצוניים במקרה זה. יתכן שהקוראים ירצו לעצור ולחשוב שעה או שעתיים לפני שימשיכו לקרוא.

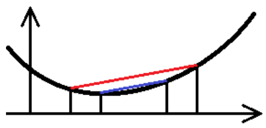
כמובן, אם יש רק 3 שורות, ניתן לתת לכל שורה צבע משלה, לכן יש טעם לדבר על מצבים של מעל 4 שורות ומעל 4 עמודות.

המצבים הקיצוניים שבהם עדיין קיימת צביעה הם: 10×10, 12×9, 15×6, 18×4.

המצבים הקיצוניים בהם בהכרח יש מלבן הם: 11×10, 13×7, 17×5, 19×4.

לא קשה לראות, שבהינתן הטענות על המצבים האלה, מקבלים מסקנה לכל מלבן.

נתחיל משיקול כללי. נחשוב על טבלה עם x עמודות ו-y שורות. כמו קודם, נגיד שעמודה מחברת זוג שורות אם בעמודה הנציגים של השורות הם באותו צבע. נגיד שיש 3 צבעים, למשל לבן, כחול ואדום, אז כל שתי שורות ניתן לחבר רק 3 פעמים: פעם בלבן, פעם בכחול ופעם באדום בלי שיצא מלבן. לכן אם אין מלבן, השורות מחברות לכל היותר $3\binom{y}{2}$ שורות. נגיד שבשורה מספר i יש a_i משבצות לבנות, b_i משבצות כחולות ו-c_i משבצות אדומות. במקרה זה העמודה מחברת $\binom{a_i}{2}+\binom{b_i}{2}+\binom{c_i}{2}$ שורות. מכאן ניתן לקבל חסם: $\sum_{i=1}^{x}\left(\binom{a_i}{2}+\binom{b_i}{2}+\binom{c_i}{2}\right)\le 3\binom{y}{2}$. בהנחה $a_i+b_i+c_i=y$, נקבל את הערך המרבי של הסכום $\binom{a_i}{2}+\binom{b_i}{2}+\binom{c_i}{2}$ כאשר a_i,b_i,c_i "שווים בערך", כלומר נבדלים לכל היותר ב-1. טענה דומה נכונה לכל פונקציה קמורה, בפרט גם לפונקציה $f(t)=\binom{t}{2}=\frac{t(t-1)}{2}$. שכן, אם $t<t+1\le s-1<s$, קל לראות מהתמונה ש- $f(s)+f(t)\le f(s+1)+f(t-1)$. הוכחה מפורשת של טענה זו לפונקציות קמורות היא תרגיל לקורא.

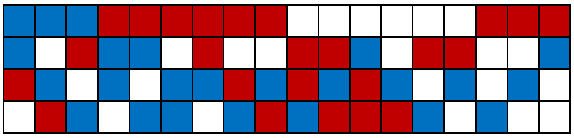


אפשר להסביר את זה גם בלי פונקציות קמורות: אם בעמודה מסוימת יש הרבה יותר משבצות מצבע אחד מאשר בצבע אחר, כאשר מחליפים צבע של משבצת אחת מהצבע היותר נפוץ לצבע הפחות נפוץ, אז השורה של המשבצת המוחלפת מחוברת כעת לפחות שורות באמצעות העמודה הזאת מאשר קודם.

שיקול זה מאפשר להוכיח שבמלבנים גדולים מדי לא יכולים להיות, וגם עוזרים לבנות דוגמאות עם מלבנים מספיק גדולים שהם לא גדולים מדי: כדאי להקפיד שבכל עמודה תהיה בערך אותה כמות של משבצות מכל צבע.

כמובן, אם יש 3 שורות בלבד, יכולות להיות כמה עמודות שרוצים, למשל הטבלה יכולה להראות כמו דגל רוסיה.

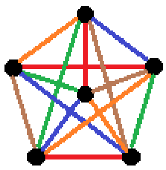
אם $y=4$, אז כל עמודה מחברת לפחות זוג אחד של שורות. ישנם 6 זוגות של שורות, כלומר מותר רק עד 18 עמודות. אם רוצים 4 שורות ובדיוק 18 עמודות צריך להקפיד שבכל עמודה יהיה רק זוג אחד מאותו צבע, וגם בעצם שלזוג של שורות יהיה עמודה אחת שמחברת אותם בכל צבע. דוגמה אפשרית מופיע בציור. כמובן שניתן לחתוך מזה דוגמה עבור $y=4$ וכל $x\le 18$.



אם $y=5$, כל עמודה מחברת לפחות שתי זוגות של שורות, ויש 10 זוגות, שמותר לחבר כל אחד מהם עד 3 פעמים. לכן $2x\le 30$, כלומר $x\le 15$.

אם $y=6$, כל עמודה מחברת לפחות שתי זוגות של שורות, ויש 15 זוגות, שמותר לחבר כל אחד מהם עד 3 פעמים. לכן $3x\le 45$, כלומר $x\le 15$.

אם נמצא דוגמה של מלבן 6×15 נוכל להוריד שורה ולקבל דוגמה גם עבור 5×15, לכן נחפש מיד דוגמה 6×15. הבנייה מבוססת על הרעיון של בניית טבלת תחרות. נניח שנפגשים 6 שחמטאים שיש להם רק 3 לוחות שח (או באופן כללי $2n$ שחמטאים עם n לוחות שח). בכל שעה מתבצע משחק, שבו הם מתחלקים לזוגות, וכולם משחקים. אבל אסור שאף אחד זוג ישחק פעמיים. כמה שעות הם יוכלו לשחק? כמובן לא יותר מ-5, שכן לכל אחד ניתן למצוא רק 5 יריבים. אבל האם באמת יתכן שיהיו 5 משחקים וכל אחד ישחקו עם כל אחד?



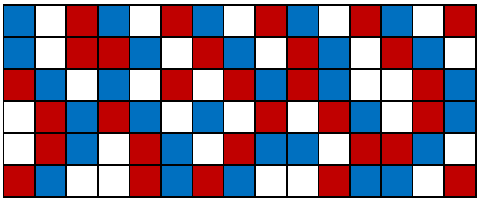
מסתבר שכן, וניתן לארגן את התחרות בצורה הבאה – נייצג את השחמטאים באמצעות 6 נקודות במישור: מחומש משוכלל ומרכזו. בכל משחק נבחר צלע – זה זוג אחד, אלכסון שמקביל לו – זה זוג נוסף, ואת הקודקוד שעוד לא זווג נזווג עם המרכז. עבור 5 כיוונים שונים נקבל 5 זיווגים שונים, וכל זוג (צלע, אלכסון או רדיוס) מופיע פעם אחד בדיוק. ניתן להכליל את הבנייה הזאת לכל כמות של שחמטאים (במקרה של מספר אי-זוגי מוסיפים שחקן "מדומה", שהוא מעסיק כך פעם שחקן אמיתי אחר, כלומר לכל שחקן אמיתי יהיה סבב אחד בדיוק שהוא מדלג עליו).

דרך אלגברית לבנות תחרות בה כולם משחקים עם כולם פעם אחד בדיוק: נגיד שלחמישה שחקנים יש מספרים: $0, 1, 2, 3$, ולשחקן שישי אין מספר. במשחק מספר k נתבונן במשוואה $x+y=k\,(\mathrm{mod}\,5)$. זה מחלק את המספרים לזוגות, חוץ ממספר אחד שמקיים $2z=k\,(\mathrm{mod}\,5)$, ואת השחקן שמתאים למספר זה ניתן לזווג עם השחקן שאין לו מספר.

בעצם, התיאור הגיאומטרי והתיאור האלגברי שקולים.

כעת נניח שיש שישה שחקנים, ושלוש לוחות משחק שהם משחקים שונים: שחמט, דמקה ואותלו. כל מתחרה רוצה לשחק עם כל מתחרה אחר כל משחק פעם אחד בדיוק. האם אפשר לארגן תחרות כזאת (לכל משחק מוקצה אותו זמן)?

כמובן, אם יש כזאת תחרות, היא צריכה להימשך 15 משחקים, ולהעסיק את כל השחקנים בכל המשחקים. בעצם, ניתן לעשות תחרות בשיטה שכבר המצאנו: בכל סבב נחלק את השחקנים לזוגות, ובמשחק הראשון זוג א' ישחק שח, זוג ב' ישחק דמקה וזוג ג' ישחק אותלו; במשחק נוסף זוג א' ישחק דמקה, זוג ב' ישחק אותלו, וזוג ג' ישחק שח, ובמשחק שלישי זוג א' ישחק אותלו, זוג ב' ישחק שח וזוג ג' ישחק דמקה. נעשה את 5 החלוקות לזוגות כמו שהסברנו קודם (כאשר היה רק משחק אחד) ובכל חלוקה לזוגות נעביר כל זוג ממשחק למשחק באופן מעגלי.



זה בדיוק נותן פתרון לטבלה 15×6, כאשר 6 השורות מייצגות שחקנים, העמודות משחקים שונים, צבע אדום מיצג שח, כחול מיצג דמקה, ולבן מיצג אותלו.

ובכן, פתרנו לגמרי את השאלה $6\times n$: אם $n\le 15$ מצאנו דוגמה מפורשת, ואם $n>15$ הוכחנו שתמיד יהיה מלבן. כעת נעבר ל-7 שורות.

לפי אותו עקרון שהסברנו קודם, במקרה הכי שוויוני, כאשר בעמודה יש 3 משבצות מצבע אחד ו-2 משבצות מכל צבע אחר, אז העמודה מחברת 5 שורות. יש $\binom{7}{2}=21$ זוגות של שורות ולכן מותרים רק $3\cdot 21=63$ חיבורים. לכן אם יש n עמודות, אז יש לפחות $5n$ חיבורים בין השורות, כלומר $5n\le 63$, או $n\le 12$.

לכן אם יש 7 שורות, אסור שיהיו יותר מ-12 עמודות. כמובן, גם אם יש יותר מ-7 שורות אסור יותר מ-12 עמודות. אנחנו נציג דוגמה עם 9 שורות ו-12 עמודות.

ניתן לחשוב על מועדון שייטים, שיש בו 3 סירות בצבעים שונים, כל סירה מיועדת ל-3 שייטים, וכל יום 9 חברי מועדון יוצאים לשייט, כאשר אנחנו אותם שני אנשים לא ישוטו פעמיים בסירה שבה הם כבר שטו.

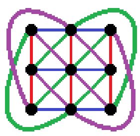
על מנת לא לחזור על המצבים שכבר היו, כל אחד מהשייטים ירשום בפנקס אישי שלו עם מי הוא כבר שט ובסירה מאיזה צבע. לאחר כל יום של שייט הוא יוכל להוסיף שני שורות לפנקס. כל שורה היא מאחת מבין 3×8 שורות אפשריות, הרי יש 3 סירות ו-8 שייטים חוץ ממנו. לכן זה יכול להימשך לכל היותר 12 פעמים. אבל איך לבנות תוכנית שייט שעונה על הדרישות?

התשובה מתקבלת ממבנה קסום, שנקרא **המישור האפיני מעל שדה של 3 איברים**.

התרגלנו בגיאומטריה אנליטית שכל נקודה במישור מתוארת על ידי זוג מספרים (x,y). ישר מתואר על ידי משוואה ליניארית: בדרך כלל $y=ax+b$, כאשר a נקרא השיפוע, אבל במקרה של ישר אנכי $x=c$ (במקרה זה אומרים שהשיפוע אינסופי). הישרים השונים נחתכים פעם אחד לכל היותר; הישרים השונים לא נחתכים אך ורק כאשר יש להם אותו שיפוע.

את כל הטענות האלה, שהן ברורות גיאומטרית, אפשר גם להסיק מאלגברה פשוטה (למשל, שאם יש שני משוואות ליניאריות שהן לא שקולות, אז יש לכל היותר פתרון אחד למערכת המשוואות). לכן טענות דומות כאשר x ו-y הם מספרים מודולו 3 ולא מספרים שלמים התרגלנו אליהם.[1]

במישור שיתקבל יש 9 נקודות – כי גם ל-x וגם ל-y יש 3 אפשרויות. כמו כן למישור יש ישרים מ-4 שיפועים, כאשר בכל שיפוע יש 3 ישרים מקבילים (בציור ישרים בשיפועים שונים מסומנים בצבעים שונים):



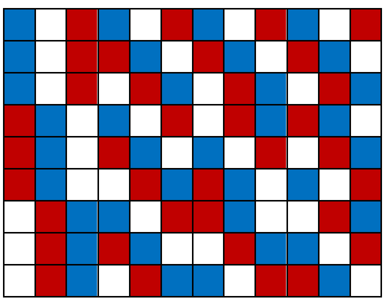
ישרים אופקיים – שיפוע 0 – הם $y=c\pmod 3$.

שיפוע 1, $y=x+c\pmod 3$.

שיפוע -1, $y=c-x\pmod 3$.

וישרים אנכיים – שיפוע אינסוף – כלומר $x=c\pmod 3$.

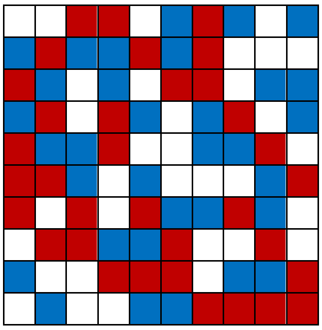
נעניק לכל אחד מהשייטים נקודה במישור שתיארנו. כל פעם נבחר שיפוע, ונחלק את השייטים לשלישיות בהתאם לשיפוע. כל שיפוע יהיה לשלושה ימים: ביום ראשון ניתן לכל שלישיה סירה באופן אקראי, ביום שני ושלישי נעשה רוטציה: הצוות של סירה לבנה יעבור לסירה כחולה, הצוות מסירה כחולה יעבור לסירה אדומה, והצוות מהסירה אדומה יעבור לסירה לבנה. לאחר שמסתיימת תקופה של 3 ימים, מחליפים חלוקה בהתאם לישרים של שיפוע אחר. אף אחד לא יהיה אם אף אחד אחר יותר מפעם אחד באותה סירה, מכיוון שלשני ישרים לא מקבילים לא יכולים להיות שתי נקודות משותפות.



מטבלה זאת אפשר גם לגזור טבלה 8×12 או 7×12. ובכן, פתרנו גם שאלה עבור 7, 8 או 9 שורות: מותר עד 12 עמודות ואסור יותר.

[1] ניתן לקחת במקום מספרים ממשיים כל קבוצה של מספרים שיש להם 4 פעולות חשבון (חיבור, חיסור, כפל וחילוק כאשר מותר לחלק בכל מספר לא אפסי) עם התכונות הרגילות. קבוצה כזאת של מספרים נקראת ***שדה***.

כעת השאלה היא כמה עמודות יכולות להיות עבור 10 שורות. מסתבר שיכולות להיות 10 עמודות ולא 11, כפי שמתקבל מהחסם. את העובדה שקיימת טבלה 10×10 אנו נוכיח באמצעות דוגמה מפורשת. אנחנו לא יודעים להסביר איך בן-אדם יכול לעלות על דוגמה זו – מצאנו אותה באמצעות בדיקת מקרים במחשב. הקוראים יכולים להשתכנע שהדוגמה הזו עובדת – לעבור על כל זוגות השורות ולוודא שכל זוג מחובר לא יותר מפעם אחד באמצעות כל צבע. בנוסף, מבדיקת המקרים עולה כי דוגמה זו היא יחידה עד כדי החלפת סדר שורות ועמודות ושינוי הצבעים.



נשאר להוכיח שלא קיימת דוגמה 10×11. זה בעצם המקרה האחרון שנשאל לנו על מנת לסיים הוכחה לשאלה על 3 צבעים – אם ניקח יותר שורות, אז יהיו יותר שורות מאשר עמודות, ואז נגיע למקרים שעברנו עליהם כבר (כשהתפקיד של שורות ועמודות היה הפוך).

נניח שישנן 10 שורות ו-11 עמודות. אז יש $\binom{10}{2}=45$ זוגות של שורות, וניתן לחבר רק $3\cdot45=135$ זוגות של שורות. כל עמודה, אפילו במקרה שוויוני ביותר, מחברת לפחות

$$\binom{4}{2}+\binom{3}{2}+\binom{3}{2}=6+3+3=12$$

זוגות של שורות. לכן יש לפחות $12\cdot11=132$ חיבורים בין שורות. זה לא מוביל אותנו מיידית לסתירה, הרי בכל זאת $132<135$, אבל זה גם לא מאוד רחוק מסתירה, כי המספרים קרובים. לכן יש מצב שבדיקה יותר מעמיקה תוביל לסתירה.

נתבונן בצבע הכי נפוץ בטבלה – נגיד לבן. בטבלה יש 110 משבצות, לכן בצבע הכי נפוץ יש לפחות 37 משבצות (שכן $36\cdot3=108<110$). יהיו $a_1,a_2,\dots,a_{11}$ כמויות של משבצות לבנות בעמודות שונות. במקרה הכי שוויוני 4 מבין המספרים האלה שווים 4, ושבעה המספרים האחרים שווים 3. במקרה זה מקבלים שכמות החיבורים הלבנים בין זוגות של שורות היא

$$4\cdot\binom{4}{2}+7\cdot\binom{3}{2}=4\cdot6+7\cdot3=24+21=45$$

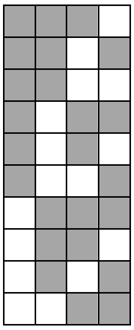
כל התפלגות אחרת של משבצות לבנות בין העמודות תיתן מספר יותר גדול. מכיוון שזה בדיוק מספר החיבורים המותר, זה המצב היחיד שאפשרי: יש בדיוק 4 עמודות עם 4 משבצות לבנות, ובכל העמודות האחרות יש 3 משבצות לבנות.

ניתן להניח ללא הגבלת הכלליות שהעמודות האלה הן העמודות השמאליות ביותר (אחרת ניתן להחליף את סדר העמודות). בעמודה ראשונה מכילה משבצות לבנות ב-4 שורות, ניתן להניח שאלה 4 שורות הנמוכות ביותר (אחרת נחליף את סדר השורות).

העמודה שנייה מכילה גם היא 4 משבצות לבנות. לעמודה הראשונה ולעמודה השנייה יש לכל היותר שורה אחת ששתיהן מכילות בה משבצת לבנה, אחרת יהיה מלבן שפינותיו באותו הצבע. לכן בעמודה השנייה יש משבצות לבנות בלפחות 3 שורות נוספות, נניח שאלה שורות 5, 6, 7 (אחרת נחליף את סדר השורות). בנוסף העמודה השנייה מכילה עוד משבצת לבנה, שניתן להניח שהיא בשורה 1 או 8.

העמודה השלישית מכילה גם היא 4 משבצות לבנות, שמתוכן רק שתיים יכולות להיות בשורות שיש בהן משבצות לבנות של עמודה ראשונה ושנייה (אחרת נוצר מלבן עם פינות לבנות). לכן אם המשבצות הלבנות של שורה עמודה ראשונה ושנייה תופסות את שורות 1 עד 8 (כלומר העמודה השנייה מכילה משבצת בשורה 8), בעמודה שלישית חייבות להיות משבצות בשורות 9 ו-10. אבל אותו דבר ניתן להגיד על עמודה רביעית, שגם היא חייבת להכיל משבצות לבנות בשורות 9 ו-10, ולכן במקרה זה יש מלבן.

אם כן, העמודה השנייה מכילה משבצות לבנות בשורות 1,5,6,7. נתבונן כעת במשבצות הלבנות של העמודה השלישית: אם יש משבצת לבנה בעמודה שלישית בשורה הראשונה, אסור שיהיו בעמודה שלישית משבצות לבנות בשורות 2 עד 7 כולל. לכן יש בה משבצות לבנות בשורות 8, 9, 10 כי אלה השורות היחידות שנשארו. מכאן שהמשבצות הלבנות של שלוש העמודות הראשונות מכסות את כל השורות, לכן לכל משבצת בעמודה הרביעית יש לפחות משבצת אחת באותה שורה באחת משלוש העמודות הראשונות. מעקרון שובך היונים, יש 2 משבצות בשורה הרביעית שיש להן משבצת כזו באותה עמודה – כלומר יש מלבן כנדרש.



נסיק שאין משבצת לבנה בעמודה השלישית בשורה הראשונה. מכיוון שלמשבצות הלבנות של העמודה השלישית יש שורה משותפת עם המשבצות הלבנות של העמודה הראשונה, (כלומר 2, 3 או 4) ויש גם שורה משותפת עם משבצות לבנות של עמודה כלומר (5, 6 או 7), ובנוסף יש שתי משבצות לבנות בשורות 8, 9 ו-10.

ללא הגבלת הכלליות יש בעמודה שלישית משבצות לבנות בשורות 2, 5, 8 ו-9.

בעמודה רביעית יש משבצות לבנות בשורות משותפות עם כל אחד מ-3 עמודות הראשונות, ואין שורה שמשותפת ל-3 משבצות לבנות ב-4 עמודות ראשונות (כמו שכבר ראינו עבור עמודה ראשונה, שנייה ושלישית). זה משאיר בעצם רק מקרה שבשורה רביעית המשבצות לבנות הן בשורות 3, 6, 8, 10 עד כדי החלפת סדר השורות. הציור מציג את הדוגמה היחידה הזאת, כאשר את משבצות אפורות צריך לצבוע בכחול ובאדום.

נחשוב, באיזה דרכים אפשר לצרף לטבלה זאת עמודה נוספת עם 3 משבצות לבנות (אנחנו צריכים לצרף 7 עמודות כאלה). אם מוסיפים עמודה עם משבצת לבנה בשורה 1, אז אסור שיהיו משבצות לבנות בשורות 2 עד 6. נשארות 3 שורות שמותר לשים בהם משבצות לבנות: 8, 9, 10 (אחרת נוצר מלבן עם פינות לבנות בין עמודה נוספת לעמודה ראשונה או שנייה). אבל אסור לחבר בין שורות 8 ו-9 (יש את השילוב הזה בעמודה 3) או 8 ו-10 (זה חיבור שמחברת בעמודה 4), לכן חייבים לקחת משבצות לבנות בשורות 9 ו-10.

ניתן לחלק את השורות לשורות שמכילות שתי משבצות לבנות ב-4 עמודות שמאליות (אלה שורות 1, 2, 3, 5, 6, 8) – נקרא להם שורות **בהירות** ושורות שמכילות משבצת לבנה אחת בעמודת אלה (שורות 4, 7, 9, 10) – נקרא להם שורות **כהות**. ראינו, שאם בעמודה הנוספת יש משבצת לבנה בשורה 1, אז שתי משבצות לבנות הן בשורות כהות. אבל טענה כזאת נכונה לכל שורה בהירה, כי המבנה הוא סימטרי. לכן בכל שורה נוספת יש שתי משבצות לבנות בשורות כהות. מכיוון שיש 4 שורות כהות, מותר להוסיף לטבלה עוד $6=\binom{4}{2}$ עמודות אבל לא יותר, אחרת יהיו שתי עמודות שיוצרות מלבן.

זה משלים את ההוכחה ונותן דרך למציאת המשבצות הלבנות בטבלה 10×10, אך לא מסביר איך לצבוע את המשבצות הנותרות בכחול ובאדום.