

## מילים

**מילה** היא רצף של אותיות, סופי או אינסופי. **תת-מילה** זה תת-רצף לא ריק של מילה נתונה. האותיות נלקחות מתוך קבוצה סופית הנקראת **אלפבית**. כשמדובר על **מחזור** של מילה מחזורית, הכוונה למחזור מינימלי. **מילון** זו רשימה מלאה של כל המילים (אם השפה סופית). **איסור** (או מילה גסה) זו תת-מילה שאסור שתופיע במילה.

1. מילה אינסופית מחזורית שאורך המחזור שלה הוא  $n$  מכילה שתי תתי-מילים זהות באורך  $n-1$ . הראו שההבדל בין נקודות ההתחלה שלהם מתחלק ב- $n$ .

2. הראו כי אם  $U$  ו- $V$  מילים, וכן  $VU$  ו- $UV$  זו אותה מילה, אז קיימת מילה  $W$  כך שגם  $U$  וגם  $V$  מתקבלות כאשר רושמים  $W$  מספר פעמים.

3. נתונים מספר סופי של איסורים: תתי-מילים שלא יכולות להיות בתוך המילה. מסתבר שקיימת מילה אינסופית שלא מכילה אף תת-מילה אסורה. הוכיחו שקיימת גם מילה אינסופית מחזורית שלא מכילה אף תת-מילה אסורה.

4. הראו שאם יש למילה אינסופית רק 100 תתי-מילים שונות באורך 100, אז המילה האינסופית היא מחזורית.

5. האם נתבונן במילה באורך  $\ell$  (באלפבית יש כמה אותיות שתרצו). האם יתכן שמספר תתי המילים השונות שלה הוא

$$(א) \ell + 1 \quad ? \quad (ב) \frac{\ell(\ell-1)}{2} - 1 \quad ? \quad (ג) 2\ell \quad ?$$

6. הראו כי קיימת מילה מחזורית בעלת מחזור  $a^{100}$  (כאשר  $a$  זה הגודל של אלפבית), שבה כל תת-מילה אפשרית באורך 100 מופיעה פעם אחת במהלך המחזור.

7. עבור שתי מילים אינסופיות, אחת עם מחזור  $m$  בדיוק והשנייה עם מחזור  $n$  בדיוק, מה האורך הגדול ביותר שיכול להיות לתת-מילה סופית שמופיעה בשתייהן? התשובה תלויה ב- $m$  ו- $n$ .

8. מייצרים מילה אינסופית באמצעות החלפות: בהתחלה רושמים את המילה "0", ולאחר מכן מקריאים את המילה הקודמת ורושמים את המילה הבאה כאשר

0 מוחלף ב-001

1 מוחלף ב-01

מכיוון שכל מילה היא רישא של המילה הבאה, ניתן להגדיר מילה גבולית: מילה שכל מילה אחרת בסדרה היא רישא שלה. הראו שהמילה המתקבלת אינה מחזורית.

9. באופן דומה מגדירים מילה שמתחילה ב-0 באמצעות הצבות

0 מוחלף ב-01

1 מוחלף ב-10

א. הוכיחו שהמילה אינה מחזורית.

ב. הראו שצפיפות ההסכמות של מילה כזאת עם כל הזזה שלה היא בין  $\frac{1}{3}$  ל- $\frac{2}{3}$ .

הגדרה. אם  $W$  מילה, מילה מסוג  $WW$  תקרא ריבוע, ומילה מסוג  $WWW$  תקרא קובייה.

10. באלפבית יש 22 אותיות. מצאו מילה שאין בה ריבועים, אבל אם תוסיפו בסופה אות כלשהי יהיה בה ריבוע.

11. באלפבית 2 אותיות. האם יש מילה אינסופית שאין בה קובייה בתור תת-מילה?

12. כמה אותיות צריך להיות באלפבית על מנת שתהיה מילה שאין בתוכה ריבוע?

13. נגיד ויש באלפבית מספר סופי של אותיות. נגדיר שקילות על מילים: אם יש תת-מילה  $W$  אפשר להחליף אותה ב- $WW$  ולהפך. הראו שעד כדי שקילות יש רק מספר סופי של מילים.

14. יש קבוצה אינסופית של מילים אסורות: הראשונה באורך 10, השנייה באורך  $10^2$ , השלישית באורך  $10^3$ , וכך הלאה. הראו כי קיימת מילה אינסופית שאין בה תת-מילה אסורה.

15. אלברט רוצה לרשום סדרה אינסופית של אפסים ואחדים, אבל לפני זה הרמן רושם  $M$  רצפים בינאריים באורך 6 שאסור שהם יופיעו באופן רצוף ברישום. מהו ה- $M$  הקטן ביותר, עבורו הרמן יכול לגרום לכך שאלברט לא יצליח לכתוב את הסדרה האינסופית?

16. נתונה מילה בינארית  $W$  אינסופית (לשני הכיוונים) בעלת מחזור הגדול מ- $2^n$ . מילה  $U$  נקראת נדושה אם כל המילים  $0U, 1U, U0, U1$  מופיעות כתת-מילים ב- $W$ . הוכיחו שיש לפחות  $n$  מילים נדושות סופיות לא ריקות.

17. בשפה יש שתי אותיות ומאה מילים, אך בלי רווחים. בכל זאת, כאשר משרשרים כמות סופית של מילים בשפה, תמיד ניתן לקרוא באופן יחיד מה המילים ובאיזה סדר הן היו. מהו מספר האותיות המינימלי שצריכות להופיע במילון? (במילון רשומה כל מילה בשפה פעם אחת)