

מילים

מילה היא רצף של אותיות, סופי או אינסופי. **תת-מילה** זה תת-רצף לא ריק של מילה נתונה. האותיות נלקחות מתוך קבוצה סופית הנקראת **אלפבית**. כשמדובר על **מחזור** של מילה מחזורית, הכוונה למחזור מינימלי.

1. מילה אינסופית מחזורית שאורך המחזור שלה הוא n מכילה שתי תתי-מילים זהות באורך $n - 1$. הראו שההבדל בין נקודות ההתחלה שלהם מתחלק ב- n .
 2. הראו כי אם U ו- V מילים, וכן VU ו- UV זו אותה מילה, אז קיימת מילה W כך שגם U וגם V מתקבלות כאשר רושמים W מספר פעמים ברצף.
 3. נתונים מספר סופי של איסורים (או מילים גסות): מילים סופיות שאסור להן להופיע בתוך המילה. מסתבר שקיימת מילה אינסופית שלא מכילה אף תת-מילה אסורה. הוכיחו שקיימת גם מילה אינסופית מחזורית שלא מכילה אף תת-מילה אסורה.
 4. הראו שאם יש למילה אינסופית (רק לכיוון ימין) רק 100 תתי-מילים שונות באורך 100, אז היא מחזורית החל משלב מסויים.
 5. בשפה יש K אותיות, N מילים, וכל המילים הן באורך M . תשבץ הוא טבלה $M \times M$ שבה כל שורה וכל עמודה היא מילה. מהו ה- N הקטן ביותר עבורו בהכרח קיים תשבץ עבור $K = 2$ ו- M כלשהו? (א) $K = 3$ ו- M כלשהו? (ב)
 6. הראו כי קיימת מילה מחזורית בעלת מחזור a^{100} (כאשר a זה הגודל של אלפבית), שבה כל תת-מילה אפשרית באורך 100 מופיעה פעם אחת במהלך המחזור.
 7. מייצרים מילה אינסופית באמצעות החלפות: בהתחלה רושמים את המילה "0", ולאחר מכן מקריאים את המילה הקודמת ורושמים את המילה הבאה כאשר
0 מוחלף ב-001
1 מוחלף ב-01
- מכיוון שכל מילה היא רישא של המילה הבאה, ניתן להגדיר מילה גבולית: מילה שכל מילה אחרת בסדרה היא רישא שלה.
הראו שהמילה המתקבלת אינה מחזורית.

8. באופן דומה מגדירים מילה שמתחילה ב-0 באמצעות הצבות

0 מוחלף ב-01

1 מוחלף ב-10

א. הוכיחו שהמילה אינה מחזורית.

ב. הראו שצפיפות ההסכמות של מילה כזאת עם כל הזזה שלה היא בין $\frac{1}{3}$ ל- $\frac{2}{3}$.

הגדרה. אם W מילה, אז המילה WW תקרא ריבוע, והמילה WWW תקרא קובייה.

9. באלפבית יש 22 אותיות. מצאו מילה שאין בה ריבועים, אבל אם תוסיפו בסופה אות כלשהי יהיה בה ריבוע.

10. באלפבית 2 אותיות. האם יש מילה אינסופית שאין בה קובייה בתור תת-מילה?

11. כמה אותיות צריך להיות באלפבית על מנת שתהיה מילה שאין בתוכה ריבוע?

12. נגיד ויש באלפבית מספר סופי של אותיות. נגדיר שקילות על מילים: אם יש תת-מילה W אפשר להחליף אותה ב- WW ולהפך. הראו שעד כדי שקילות יש רק מספר סופי של מילים.

13. אלברט רוצה לרשום סדרה אינסופית של אפסים ואחדים, אבל לפני זה הרמן רושם M רצפים בינאריים באורך 6 שאסור שהם יופיעו באופן רצוף ברישום. מהו ה- M הקטן ביותר, עבורו הרמן יכול לגרום לכך שאלברט לא יצליח לכתוב את הסדרה האינסופית?

14. נתונה מילה בינארית W אינסופית (לשני הכיוונים) בעלת מחזור הגדול מ- 2^n . מילה U נקראת נדושה אם כל המילים $0U, 1U, U0, U1$ מופיעות כתת-מילים ב- W . הוכיחו שיש לפחות n מילים נדושות סופיות לא ריקות.

15. בשפה יש שתי אותיות ומאה מילים, אך בלי רווחים. בכל זאת, כאשר משרשרים כמות סופית של מילים בשפה, תמיד ניתן לקרוא באופן יחיד מה המילים ובאיזה סדר הן היו. במילון רושמים את כל המילים בשפה פעם אחת. מהו מספר האותיות המינימלי שצריכות להופיע במילון?

16. (הכללה לשורטליסט ריבנג', 2022) נתונה מילה W שהיא אינסופית (רק לכיוון ימין). ידוע שאם מילה סופית U מופיעה אינסוף פעמים בתוך W , אז קיימת מילה סופית V , כך שקיימת נקודה שממנה והלאה ניתן לבטא את W על ידי שרשור של שתי המילים U ו- V . מה יכולה להיות W ?

בתאבון!