

???

כאן $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_{>0}$

(1) מצאו את כל הפונקציות $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ עבורן

$$f^{f^{f(x)}(y)}(z) = x + y + z + 1$$

לכל $x, y, z \in \mathbb{N}$ (כאשר f^k זה הרכבה).

(2) סדרה אינסופית של ממשיים a_0, a_1, a_2, \dots מקיימת

$$a_n = |a_{n+1} - a_{n+2}|$$

לכל $n \geq 0$, a_0, a_1 הם מספרים חיוביים שונים. האם ייתכן שהסדרה חסומה?

(3) מצאו את כל הפונקציות $\theta : \mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{Z}$ עבורן לכל $p, q \in \mathbb{Z}[x]$

$$\theta(p+1) = \theta(p) + 1 \quad *$$

$$\theta(p \cdot q) = \theta(p) \theta(q) \quad *$$

(4) נתונה סדרה $a_i \in [0, c]$ כך ש-

$$|a_i - a_j| \geq \frac{1}{i+j}$$

לכל $i > j > 0$. הוכיחו כי $c \geq 1$.

(5) האם ישנה פונקציה $s : \mathbb{Q} \rightarrow \{-1, 1\}$ כך שלכל $x \neq y$ רציונלים, עבורם $xy = 1$ או $x+y \in \{0, 1\}$ מתקיים $s(x)s(y) = -1$?

(6) נתונים $x, y > 0$ כך ש- $x^2 + y^3 \geq x^3 + y^4$. הוכיחו כי

$$x^3 + y^3 \leq 2$$

(7) תהי $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ כך שלכל $x, y \in \mathbb{Q}$, המספר $f(x+y) - f(x) - f(y)$ שלם. האם בהכרח קיים $c \in \mathbb{Q}$ כך ש- $f(x) - cx$ שלם לכל x ?

(8) יהיו $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ עבורן $f(g(n)) = f(n) + 1$ ו- $g(f(n)) = g(n) + 1$ לכל n . הוכיחו כי $f = g$.

(9) מספרים חיוביים a_1, \dots, a_{2010} מקיימים $a_i a_j \leq i + j$ לכל $i < j$. מצאו את הערך המקסימלי האפשרי של $a_1 \cdots a_{2010}$.

(10) יהיו x_i, y_i, z_i מספרים חיוביים כך ש- $z_{i+j}^2 \geq x_i y_j$ לכל $i, j > 0$. יהי $M = \max(z_2, \dots, z_{2n})$. הוכיחו כי

$$\left(\frac{M + z_2 + \dots + z_{2n}}{2n} \right)^2 \geq \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right) \left(\frac{y_1 + \dots + y_n}{n} \right)$$

בתאבון?