

טורן

שאלה: נתון גרף נטול k -קליקות עם n קודקודים. מהי כמות הקשתות המקסימאלית בגרף? באילו גרפים מתקבל המקסימום.

למה. גרף נטול k -קליקות עם n קודקודים מכיל קודקוד מדרגה $\left\lfloor \frac{k-2}{k-1} n \right\rfloor$ לכל היותר.

0. א. נתון פנס ו- $2n+1$ סוללות ($n > 2$). ידוע שכמות הסוללות החדשות גדולה ב-1 מכמות הסוללות הריקות, אך לא ידוע אילו סוללות הן חדשות ואילו ריקות. ניתן להכניס שתי סוללות לתוך הפנס והוא יאיר אך ורק אם שתיהן חדשות. כמה נסיונות נדרשים על מנת להפעיל את הפנס בוודאות?
ב. אותה השאלה, אך כאשר יש $2n$ סוללות ($n > 2$), וידוע שיש אותה כמות של סוללות חדשות וסוללות ריקות.

1. במדינה רחוקה 1002 ערים. כל עיר מחוברת לפחות עם 2000 ערים אחרות. מצאו את ה- k המינימלי עבורו חייבת להיות k קליקה.

2. על מעגל נבחרו 12 נקודות. הוכיחו שיש לפחות 100 זוגות של נקודות, שיוצרות זווית שאינה גדולה מ- 120° .

3. נתונות $5n$ נקודות במישור. הן קצוות של $10n^2 + 1$ קטעים שצבועים בשני צבעים. הוכיחו שיש משולש מונוכרומטי.

4. זוג נקודות במישור נקרא מגניב אם מרחק מנהטן ביניהן גדול מ-1 וקטן שווה ל-2. במישור סומנו 100 נקודות. מהי הכמות המקסימלית של זוגות מגניבים?

5. בגרף $2n$ קודקודים ו- $n^2 + 1$ קשתות. הראו כי בגרף יש שני משולשים שונים בעלי צלע משותפת.

6. נתונות 101 תתי קבוצות של $\{1, 2, \dots, n\}$. גודל האיחוד של כל 50 קבוצות הוא מעל ל- $\frac{50}{51}n$. הוכיחו כי קיימות שתי קבוצות כך שבכל שתיים יש איבר משותף.

7. נתון גרף בעל n קודקודים ו- m קשתות. נסמן ב- $\bar{\Delta}$ את כמות המשולשים בגרף ועוד כמות המשולשים בגרף המשלים. הראו כי

$$\bar{\Delta} \geq \binom{n}{3} + \frac{2m^2}{n} - (n-1)m.$$

8. הראו כי בגרף בעל n קודקודים ו- m קשתות יש לפחות $\frac{4m^2}{3n} - \frac{nm}{3}$.

9. מבין קוצה של 120 חברי כנסת חלקם חברים וחלקם אויבים. רביעית חברי כנסת שמתוכם רק שניים חברים נקראת רביעיה לא ידידותית. מה היא הכמות המקסימלית של רביעית לא ידידותיות בכנסת?

10. בגרף n קודקודים. מהי הכמות המרבית של הקליקות המקסימליות?

בתאבון!