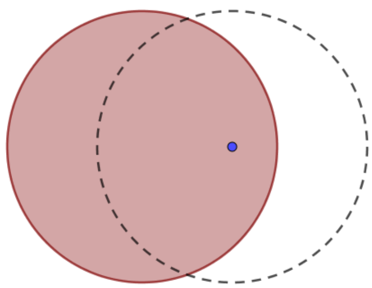
תרגיל 9

1. בעיגול סומנה נקודה שהיא לא במרכז. רוצים לחתוך את העיגול (באמצעות מספריים) ל-n חלקים ולהרכיב מהחלקים עיגול, כך שהנקודה המסומנת תהיה במרכז. עבור איזה n קטן ביותר זה אפשרי?

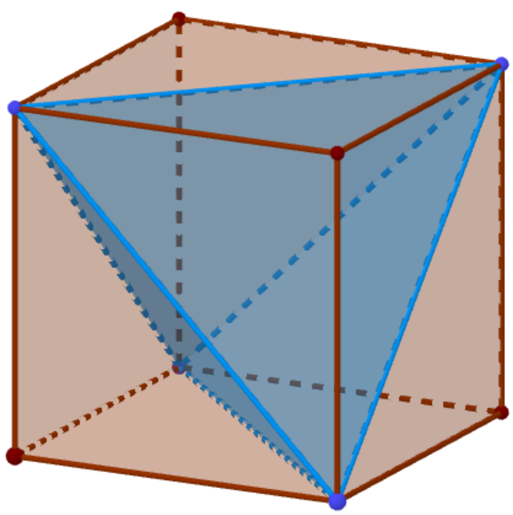
תשובה. 2.



פתרון. כמובן, אם $n=1$ פירוש הדבר שלא חותכים את העיגול ולכן הנקודה מסומנת לא במרכז.

עבור $n=2$ הדבר אפשרי. נדמיין מעגל שמרכזו הוא הנקודה המסומנת ורדיוסו שווה לרדיוס העיגול. נחתוך את העיגול לאורך מעגל זה (או יותר מדויק, לפי קשת שמוכלת בעיגול. נוצרים שני חלקים: סירה סימטרית וסהר. אם נעביר את הסבר לצד השני של הסירה, נקבל עיגול באותו גודל ונקודה מסומנת במרכזו.

2. רוצים לחלק את הקוביה ל-n ארבעונים (לאו דווקא חופפים). עבור איזה n קטן ביותר זה אפשרי?



תשובה. 5.

פתרון. אפשר לצבוע את קודקודי הקוביה בשני צבעים, נגיד כחול ואדום, כך שכל שני קודקודים שמחוברים בצלע יהיו בצבעים שונים.

קודקודים כחולים יוצרים ארבעון וכל קודקוד אדום יחד עם 3 קודקודים כחולים שסמוכים אליו גם יוצרים ארבעון, וכך הקוביה מתפרקת ל-5 ארבעונים.

בשביל להוכיח מינימליות, נצטרך טענת עזר:

טענה. שטח של משולש שמוכל בריבוע יחידה הוא לכל היותר $\frac{1}{2}$.

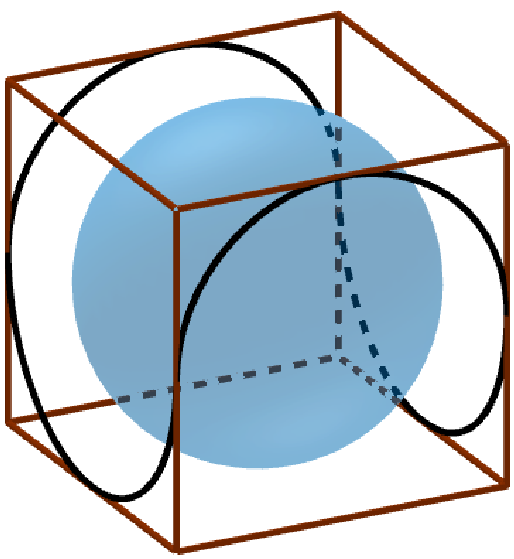
נוכיח את הטענה בהמשך. כל פאה של קוביה מכוסה על ידי פאות של ארבעונים. הפאות של ארבעון לא מקבילות זו לזו, לכן אם יש לארבעון פאה שמכסה חלק מפאה עליונה, אז אף פאה שלו לא מכוסה שום שטח בפאה תחתונה. לכן על מנת לכסות את שתי הפאות האופקיות,

חייבים לפחות 4 ארבעונים. לכל אחד מהארבעונים האלה שטח הפאה האופקית הוא $\frac{1}{2}$ לכל היותר לפי הטענה, לכן נפחו הוא לכל היותר $\frac{1}{6}$ בהתאם לנוסחה: גובה כפול בסיס חלקי 3. לכן יש לנו לפחות 4 ארבעונים שמכסים לכל היותר $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$ וצריכים גם את ארבעון נוסף.

נשער להוכיח את הטענה. כאשר מזיזים אחד מהקודקודים של המשול בתוך הריבוע, השטח יצא מקסימלי כאשר הקודקוד הכי רחוק מהישר שנוצר על ידי שתי נקודות אחרות, וזה כאשר הוא באחד הקודקודים. נזיז את כל הקודקוד ככה זה אחר זה, ונקבל שמשולש הכי גדול שנמצא בתוך ריבוע זה משולש שכל הקודקודים שלו הם קודקודי הריבוע, ושטחו בדיוק חצי משטח הריבוע.

הערה. אפשר להוכיח שהדוגמה שלנו היא הדוגמה היחידה, עד כדי סיבוב. אכן, הליבה בדוגמה שציירנו, נפחה בדיוק $\frac{1}{3}$, ובדומה לטענה שהוכחנו לריבוע, זה ארבעון הכי גדול שמוכל בקוביה. מכאן אפשר להבין, שבפתרון כל אי-השוויונים הופכים לזהויות, וזה מצמצם את בדיקת המקרים.

3. נתונה נקודה במרחב, ונתונים 5772 מישורים, אשר מרחק כל אחד מהנקודה הינו לכל היותר 1. האם זבוב בהכרח יכול לעשות מסלול סגור באוויר, שאורכו לא עולה על 13, שעובר דרך כל המישורים הנתונים?



תשובה. אפשר אפילו מסלול באורך 4π שזה קטן מ-13.

פתרון. נדמיין כדורי שרדיוסו 1 ומרכזו בנקודה הנתונה. כל אחד מבין 5772 המישורים הנתונים חותך את הכדור. אנחנו רוצים לבנות קו מרחבי, קצר ככל האפשר (עבור מסלול הזבוב) כך שהקמור שלו יכיל את הכדור. במקרה זה כל מישור שיחתוך את הכדור יחתוך גם את הקו.

בציור יש קו כזה, שאורכו 4π. קודם בוחרים קובייה שחוסמת את הכדור ויש לה שתי פאות אופקיות. המסלול מוכל בפאות האנכיות, בכל פאה לוקחים חצי מעגל מתוך המעגל החסום של הפאה, שמחבר שתי אמצעים של מקצועות אנכיים, כאשר באופן מתחלף בוחרים פעם חצי מעגל עליון ופעם חצי מעגל תחתון.

קמור של חצי מעגל ראשון ושלישי מכיל חצי מהכדור, וקמור של חצי מעגל שני ורביעי מכיל את החצי השני של הכדור.

4. נתונה קבוצה סופית S של נקודות במרחב. היטלים של קבוצה זאת ל-3 מישורים שמאונכים זה לזה הם S_x , S_y , S_z. הראו כי $|S|^2 \le |S_x|\cdot|S_y|\cdot|S_z|$.

נזכיר כי $|A|$ זה כמות האיברים בקבוצה A.

פתרון. נוכיח את הטענה באינדוקציה על $|S|$. כאשר יש 0 נקודות או נקודה אחת, הטענה ברורה. לכן $|S|\ge 2$.

נבחר מערכת צירים בהתאם ל-3 המישורים המאונכים.

נניח שלא לכל הנקודות ב-S יש את אותה קואורדינאטת x, ואם לא, פשוט נשנה שמות לצירים. לכן ניתן לבחור מישור $\{x=c\}$ שמחלק את S לשתי קבוצות לא ריקות. בצד אחד יש קבוצה L שמקיימת $|L|^2 \le |L_x|\cdot|L_y|\cdot|L_z|$ לפי הנחת האינדוקציה, ובצד השני יש קבוצה R שמקיימת $|R|^2 \le |R_x|\cdot|R_y|\cdot|R_z|$. הקבוצות זרות, וגם בהטלה לשני כיוונים, לכן

$$|S|=|L|+|R|$$

$$|S_y|=|L_y|+|R_y|$$

$$|S_z|=|L_z|+|R_z|$$

בהטלה למישור שלישי הקבוצות עלולות להתערבב, ולכן אין אי-שוויון מסוג זה, אבל ניתן להגיד כי $|S_x|\ge|L_x|$ וגם $|S_x|\ge|R_x|$. צריך להוכיח כי

$$|S|^2 \le |S_x|\cdot|S_y|\cdot|S_z|$$

כלומר

$$\left(|L|+|R|\right)^2 \le |S_x|\cdot\left(|L_y|+|R_y|\right)\cdot\left(|L_z|+|R_z|\right)$$

אבל $|L|^2 \le |L_x|\cdot|L_y|\cdot|L_z| \le |S_x|\cdot|L_y|\cdot|L_z|$, ודבר דומה עבור R, לכן מספיק להראות כי

$$2|L|\cdot|R| \le |S_x|\cdot\left(|L_y|\cdot|R_z|+|R_y|\cdot|L_z|\right)$$

זה לא קשה הרי

$$2|L|\cdot|R|\le 2\sqrt{|L_x|\cdot|L_y|\cdot|L_z|\cdot|R_x|\cdot|R_y|\cdot|R_z|}\le 2|S_x|\cdot\sqrt{|L_y|\cdot|L_z|\cdot|R_y|\cdot|R_z|}\le$$
$$\le|S_x|\cdot\left(|L_y|\cdot|R_z|+|R_y|\cdot|L_z|\right)$$

הצעד האחרון מסתמך על אי-שוויון $2\sqrt{ab}\le a+b$ שהוא נכון לכל שני מספרים אי-שליליים, הרי $0\le\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$.

5. נתון לוח משבצות $n\times n$. ברגע ההתחלתי עומדות נמלים בחלק ממרכזי המשבצות. הנמלים מתחילות לזוז במהירות 1 (כאשר רוחב משבצת הוא 1) בכיוונים כלשהם המקבילים לצלעות הלוח.
כאשר שתי נמלים המגיעות מכיוונים מנוגדים נפגשות הן פונות $90°$ בכיוון השעון (כל אחת ביחס לכיוון התנועה שלה) וממשיכות ללכת במהירות 1. אם במקום כלשהו 3 נמלים או יותר נפגשות הן ממשיכות לנוע באותו כיוון ומהירות וכך יעשו גם שתי נמלים הנעות בכיוונים מאונכים. אם נמלה מגיעה לקצה הלוח היא נופלת מהלוח.

קבעו מהו הזמן המאוחר ביותר בו יכולה ליפול הנמלה האחרונה מהלוח, או הוכח שזמן זה לא בהכרח קיים (כלומר שאפשרי שחלק מהנמלים תשארנה על הלוח לנצח).

פתרון. מכיוון שלנמלים אין שמות, אפשר להניח שבמפגש שתי הנמלים פונות עם כיוון השעון, ואפשר להניח שהן פונות נגד כיוון השעון, וזה שקול. אז אפשר להניח שיש נמלים מסוג ראשון שהולכות מזרחה או צפונה, ויש נמלים מסוג שני שהולכות מערבה או דרומה. בכל מפגש לפני המפגש יש שני נמלים מסוג שונים, וגם אחרי, אז אפשר להניח שכל נמלה שמרה על הסוג שלה.

במילים אחרות אם נכניס מערכת צירים על השולחן, אז לכל נמלה סכום הקואורדינאטות $x+y$ עולה (אם היא מסוג ראשון) או יורדת (היא מסוג שני) בקצב 1. המינימום ההתחלתי לנמלה מסוג ראשון זה $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$, המקסימום שיכול להיות לנמלה שנמצאת על הלוח זה $2n$, לכן נמלה מסוג ראשון יכולה להישאר על הלוח לא יותר מאשר $2n-1$. כמו כן, גם נמלה מהסוג השני יכולה להישאר על הלוח לא יותר זמן מאשר $2n-1$ מסיבה סימטרית.

זה לא חסם הכי טוב.

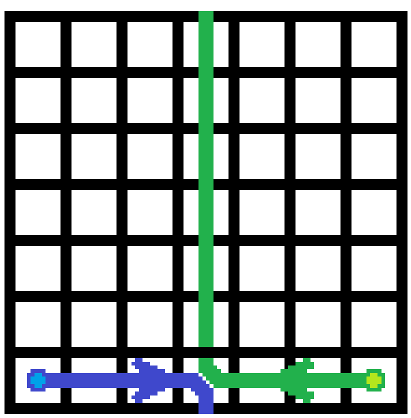
נשים לב, שהחל אחרי זמן $n-1$ לאחר ההתחלה, כל נמלה מסוג ראשון כבר בחצי השני של התחום המותר עבור $x+y$, כלומר מקיימת $x+y>n$, וכל נמלה מהסוג השני היא להפך,

מקיימת $x+y<n$, כלומר הנמלה מהסוג הראשון כבר לא תוכל לפגוש נמלה מהסוג השני. לכן כבר לא יהיו פניות.

כמו כן, כיוון התנועה של כל נמלה גורם לה להתרחק מהאלכסון $x+y=n$.

היינו יכולים באופן דומה (או באותו אופן, אבל עם בחירה אחרת של מערכת צירים) להגיד שכל נמלה מתרחקת מהאלכסון $x=y$.

האלכסונים מחלקים את הלוח ל-4 משולשים. הזמן המרבי שהנמלה יכולה להישאר על הלוח כאשר היו מתרחקת משני האלכסונים, שווה לגובה של כל אחד מבין 4 המשולשים, וזה יכול לקרות רק אם הנמלה יוצאת מהמרכז, והזמן הוא $\frac{n}{2}$. לכן מרגע שעבר זמן $n-1$ נשאר עוד זמן $\frac{n}{2}$ וזה אומר שהזמן שיכול לעבור בסה"כ מהתחלה ועד שהלוח ריק הוא $\frac{3}{2}n-1$ לכל היותר.



זה חסם יותר טוב, אבל עוד לא ברור האם הוא הכי טוב בלי שנראה דוגמה. נניח שיש רק שתי נמלים שמתחילות ממרכזי משבצות נגדיות של השורה הדרומית ביותר והולכות זו לקראת זו. כעבור זמן $\frac{n}{2}-\frac{1}{2}$ ואחת מהן פונה צפונה (הזאת שפונה דרומה נופלת מהלוח די מהר) וממשיכה זמן $n-\frac{1}{2}$. בסה"כ הנמלה הזאת מטיילת על הלוח זמן $\frac{3}{2}n-1$, וזה בדיוק מתאים לחסם.

6. על כל פאה של ארבעון נמצאת נמלה, שהולכת על היקף של הפאה נגד כיוון השעון במהירות שגדולה יותר מאשר סנטימטר לשנייה, אבל לאו דווקא במהירות קבועה. הראו כי מתישהו ת נמלים חייבות להיפגש. האם טענה דומה נכונה לכל פאון קמור?

פתרון. ניתן שמות לקודקודי הארבעון: A, B, C, D. נגיד כי
נמלה א' הולכת במסלול $B\to C\to D\to B$,
נמלה ב' הולכת במסלול $A\to D\to C\to A$,
נמלה ג' הולכת במסלול $A\to B\to D\to A$,
נמלה ד' הולכת במסלול $A\to C\to B\to A$.
נחכה מספיק זמן עד שכל נמלה כבר עברה 10 מקצועות לפחות.
אז תתקיים הטענה: אף שני נמלים לא נמצאות על אותו מקצוע, ואם כן סיימנו.

אכן, אם הנמלים עוברים את המקצוע בכיוונים הפוכים. אם שתיהן מכוונות עם הפרצוף זו לזו, הן יפגשו בקרוב, ואם הן נמצאות עם הגב אחת לשנייה, אז הן נפגשו לפני זמן קצר.

כמו כן, לא יתכן שיש 3 נמלים על 3 מקצועות מאותו קודקוד. לכל נמלה מוגדר כיוון הליכה על כל מקצוע, ואם יש נמלים על 3 המקצועות מאותו קודקוד, אז או שכל הנמלים מתקרבות לקודקוד, או שכל הנמלים מתרחקות מהקודקוד. במקרה הראשון, נחקה זמן מה עד שנמלה ראשונה תגיע לקודקוד זה והיא תעבור למקצוע אחר שבו כבר יש נמלה.

במקרה השני נחזור אחורה בזמן עד שנמלה ראשונה תחזור לקודקוד זה ואפילו רגע לפני זה, ושוב נראה שתי נמלים על מקצוע אחד.

נמשיך את תנועת הנמלים עוד, עד שהנמלה א' תגיע לנקודה B (היא הגיעה מנקודה D וממשיכה לנקודה C).

אז לפי הטענה נמלה ג' לא על BD אלה על AB או על AD. כמו כן, נמלה ד' היא לא על BC אלה על AB או על AC. שתיהן נמצאות על המקצועות של A, לכן הנמלה ב' לא נמצאת על מקצועות של A אלה על CD.

לא יתכן שגם נמלה ג' וגם נמלה ד' על AB. לכן או שנמלה ג' על AD, או שנמלה ד' על AC.

במקרה הראשון, רגע אחת קודם היו 3 נמלית על מקצועות של D, ובמקרה השני בעוד רגע יהיו 3 נמלים על מקצועות של C.

הכללה. אנחנו נוכיח את הטענה לכל פאון קמור (או לכל מפה על קליפה כדורית; קל לבנות דוגמאות נגדיות על טורוס). נגדיר גרף מכוון, שקודקודיו הם הפאות של הפאון 0או המרכזים של הפאות, כאשר מרכז היא נקודה מסומנת כלשהי בתוך הפאה), ומכל קודקוד יוצאת קשט מכוונת לקודקוד אחר. הקשת מוגדרת כך: הולכים ממרכז הפאה לנמלה המשויכת לפאה, עוברים דרך הנמלה לפאה אחרת וממשיכים למרכז הפאה האחרת.

כאשר נמלה כלשהי מגיע לקודקוד ופונה למקצוע חדש, הגרף משתנה.

אנחנו יכולים להניח שהשינויים האלה לא מתרחשים בו-זמנית.

מכיוון שמכל קודקוד יוצאת קשת, יש מסלול סגור (לפחות אחד) בגרף המקוון. נצייר את המסלול הסגור על פני הפאון. על מסלול זה נמצאות מספר נמלים, וכולן מקוונות לאותו כיוון, לכן המסלול מחלק את המשטח של הפאון לשני חלקים: הצד הפנימי והצד החיצוני.

כמו שהוכחנו גם במקרה הפרטי, ניתן להניח שאין שני נמלים על אותו מקצוע.

נחשוב על הרגע שבו לראשונה נמלה כלשהי מהמסלול הסגור מגיעה לקודקוד ופונה. אז המסלול מפסיק להיות מסלול סגור. אבל אפשר להמשיך את המסלול בהתאם לגרף, ולא נוכל לצאת מהצד הפנימי של המסלול, כי על המקצוע שהנמלה עזבה אין אף נמלה, לכן המסלול הסגור החדש לא יכול לחצות את המסלול הקודם. לכן נוצר מסלול סגור חדש, שהצד הפנימי שלו כולו נמצא בצד הפנימי של המסלול הקודם.

הקודקוד שבו הנמלה פנתה, שמקודם הוא היה בצד הפנימי, עכשיו היא בצד החיצוני. לכן המסלול אחרי כל שינוי מכיל פחות ופחות נקודות בתוכו.

בשלב מסוים מגיעים למסלול שיש בתוכו 0 קודקודים, זה כאשר עוברים מפאה מסוימת לפאה האחרת ובחזרה, וזה המצב שיש שתי נמלים על אותו מקצוע, והן חייבות להיפגש.