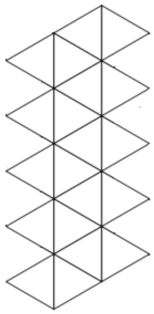
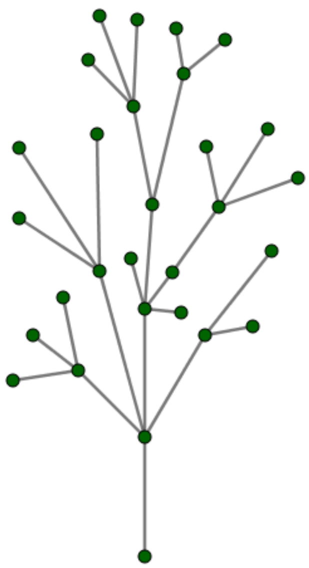
תרגיל 7



הגדרה חשובה: גרף זה קבוצה של נקודות וקשתות בניהם.

1. אלון גזר מדף נייר פריסה של איזשהו פאון. על מנת ליצר פאון קמור, הוא צריך לקפל את הפריסה לאורך K קטעים שמפרדים בין שתי פאות סמוכות של הפאון, ולהדביק M זוגות של קטעים. כמה פאות וכמה קודקודים יהיו למצולע?

התשובה צריכה להיות במונחים של K ו-M, הפריסה בצד שמאל היא להמחשה בלבד, הפאון הוא לא בהכרח עשרימון.



פתרון. הרעיון הוא שכל פאון עשוי עץ.

נזכיר כי עץ הוא גרף קשיר ללא מעגלים.

בכל עץ, שבו יש N קודקודים יש בדיוק $N-1$ קשתות.

קל לראות את זה כאשר תולשים עלים לעץ אחד-אחד (עלה זה קודקוד שמחובר לקודקוד אחד בלבד; לכל עץ יש עלה).

בשאלה שלנו, אפשר לחשוב על שני עצים.

עץ אחד הוא גרף, שקודקודיו הם פאות הפאון, והקשתות שלו הם קיפולים. בעץ זה יש K קשתות, ולכן בפאון יהיו $K+1$ פאות.

עץ אחר הוא גרף, שהקשתות שלו הן מקצועות שבהן בוצעה הדבקה, וקודקודיו הם קודקודי הפאון. בעץ זה יש M קשתות, ולכן $M+1$ קודקודים.

בזה פתרנו את השאלה, אבל ראוי לציין שבכך גם הוכנו את נוסחת אוילר $V-E+F=2$ כאשר V כמות הקודקודים, E כמות הקשתות, ו-F כמות הפאות בפאון הקמור. הרי $V=M+1$, וגם $F=K+1$, ומצד שני $E=K+M$ כי כל מקצוע מתקבל מקיפול או מהדבקה.

2. במינקלנד הרבה ערים, בין כל שתי ערים יכול להיות שיש אוטובוס ויכול להיות שאין. יאג ולאון מטיילים במינקלנד בשיטה הבאה: בהתחלה, יאג מחליט על עיר שממנה יתחיל הטיול, ולאחר מכן יאג ולאון מחליטים בתורות לאיזו עיר לנסוע (לאון מתחיל), כך שבין העיר בה הם נמצאים לעיר הבאה יש אוטובוס, והם עוד לא ביקרו בעיר הזו. בנוסף, יאג ולאון התערבו, ומי שמתישהו לא יוכל לבחור את עיר הבאה בטיול יפסיד. מצאו מתי ללאון יש אסטרטגית ניצחון.

פתרון. לאון מנצח אם ורק אם כמות הערים זוגית, ואפשר לזווג את הערים כך שבין כל זוג ערים יש אוטובוס.

בתור התחלה, אם יש זיווג כזה, נראה אסטרטגיה ללאון. אם תור לאון, הוא מסתכל על העיר בה הם נמצאים, ועובר לעיר המזווגת אם הוא יכול. נניח בשלב מסויים יאג הלך לעיר A, ולאון אינו יכול

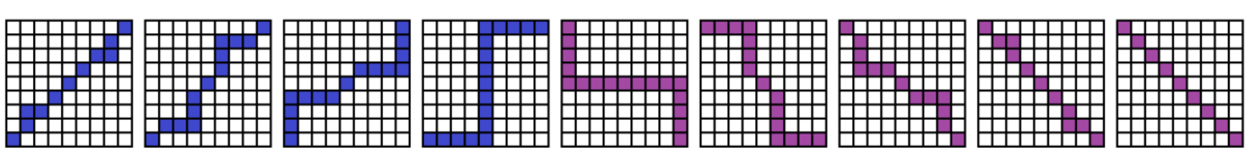
לעשות מהלך, כלומר יאג ולאון כבר ביקרו בעיר המזווגת B , אז יש שני מקרים אם יאג הוא זה שהעביר אותם ל-B אז לאון היה מעביר אותם ל-A לפי האסטרטגיה, בסתירה לכך שהם לא ביקרו בה לפני כן, ואם לאון לקח אותם ל-B אז לפי האסטרטגיה זה בהכרח כי הם לפני כן היו ב-A, גם בסתירה. מכיוון שלאון תמיד מצליח לעשות מהלך, הוא בהכרח ינצח.

נשאר להראות שאם אין זיווג כזה אז יאג מנצח. נסתכל על הזיווג של חלק מהערים, שמכיל הכי הרבה ערים שאפשר. מכיוון שאין זיווג של כל הערים, ישנה עיר שאינה בזיווג A . יאג יתחיל ממנה, ואז אם הוא מגיע לעיר שנמצאת בזיווג המקסימאלי, אז הוא ילך לעיר המזווגת (שהוא יכול לפי אותו טיעון כמו המקרה הקודם). נניח בשלב מסוים לאון לוקח אותם לעיר שאינה בזיווג המקסימאלי B, אזי לפי האסטרטגיה יש מסלול מ-A ל-B באורך אי-זוגי, שהצלעות הזוגיות שלו הן צלעות בזיווג. אם נחליף את הצלעות הזוגיות בצלעות האי-זוגיות, נקבל זיווג עם יותר צלעות, ובפרט יותר קודקודים, בסתירה למקסימאליות. לכן ליאג תמיד יש מהלך, והוא מנצח.

3. חתכו מקובייה $n\times n\times n$ מספר קוביות של $1\times1\times1$ כך שהצורה שהתקבלה עדיין מחוברת (כלומר אפשר לעבור מכל קובייה שנשארה לכל קובייה ששארה תוך מעבר רק בפאות של קוביות שנשארו), כמו כן אם מסתכלים על כל אחת משלושת הפאות לא רואים את הצד השני:
א. כמה קוביות הסרנו לכל היותר כאשר n אי-זוגי.
ב. כמה קוביות הסרנו לכל היותר כאשר $n=4$.

פתרון. נניח שהצורה מורכבת K קוביות. יש גרף קשיר, שקודקודיו הן הקוביות והקשתות שלו הן ההדבקות. אז יש לפחות $K-1$ הדבקות. הדבקות יכולות להיות ב-3 כיוונים, ובאחת הכיוונים נקבל לפחות $\frac{K-1}{3}$ הדבקות. לכן כשמסתכלים בכיוון זה על הקוביה, נראה לכל היותר $K-\frac{K-1}{3}$ ריבועים. אבל צריכים לראות n^2 ריבועים. לכן $n^2\le K-\frac{K-1}{3}$. לכן $3n^2\le 2K+1$, כלומר כמות הקוביות שצריך היא לפחות $K\ge\frac{3n^2-1}{2}$. כאשר n זוגי, אפשר לוותר על -1.

א. הנה דוגמה למספר אי-זוגי (הציור ממחיש את המקרה של $n=9$)



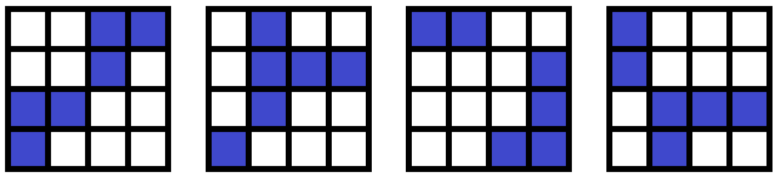
בכל שכבה עושים סוג של שרשרת, בשכבות הראשונות מונוטונית עולה, החל מהמרכז מונוטונית יורדת. קל לראות שרכיבים שונים בשכבה שיותר רחוקה מהמרכז מחוברות לרכיב אחד על ידי שכבות שיותר קרובות למרכז, ושיש קוביה בכל שורה, בכל עמודה ובכל טור.

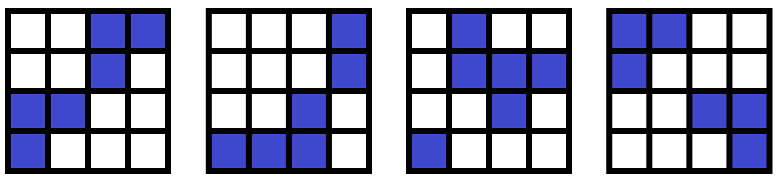
בשתי השכבות המרכזיות יש $2k-1$ קוביות, וחוץ מזה כל פעם שמתרחקים מהמרכז יש שתי קוביות פחות, לכן מקבלים

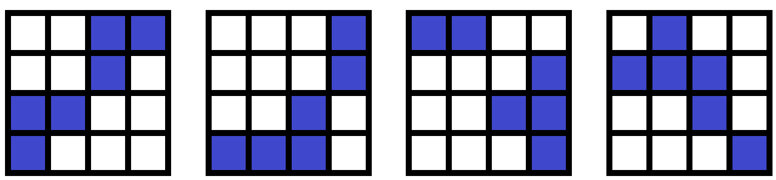
$$\left(k+2\right)+\left(k+4\right)+\ldots+\left(2k-1\right)+$$
$$+\left(2k-1\right)+\left(2k-3\right)+\left(2k-5\right)+\ldots+\left(k+2\right)=$$
$$=(2k-1)+\frac{k-1}{2}\cdot\left(3k-1\right)=\frac{4k-2+3k^2-4k+1}{2}=\frac{3k^2-1}{2}$$

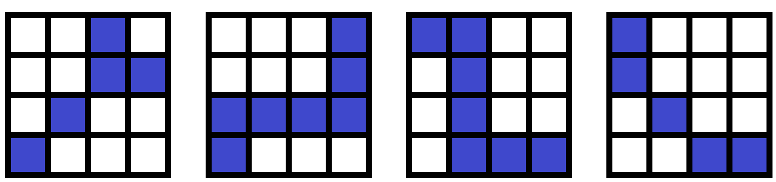
כלומר הדוגמה הזאת היא באמת הכי טובה.

ב. כמות הקוביות היא לפחות $\frac{3\cdot 4^2}{2}=24$. נציג 3 דרכים שונות ליצר מבנה:

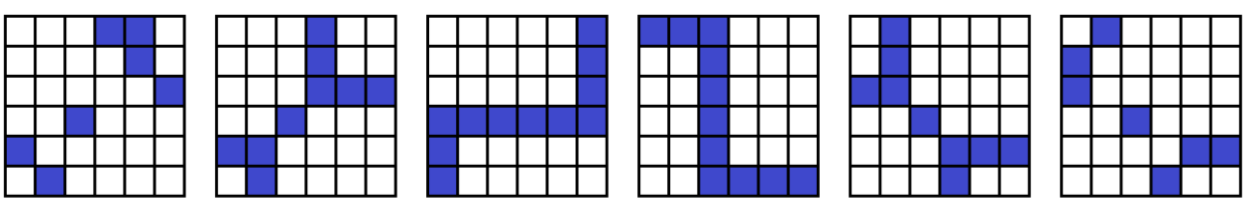

(1)

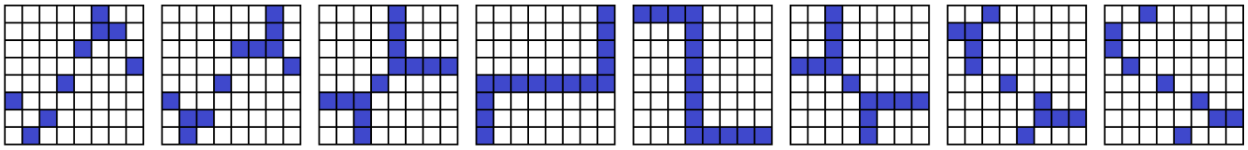

(2)


(3)


(4)

הערה. הדוגמא הרביעית היא חלק מהדוגמה הכללית של שחר פרידמן לכל n זוגי שנותנת $\frac{3}{2}n^2$.





ודבר דומה עובד גם בהמשך.

4. בתחרות מתמטיקה משתתפים N מתחרים, חלקם חברים וחלקם לא (חברות היא הדדית). קבוצת מתחרים נקראת קליקה אם כולם חברים של כולם. נתון שהקליקה הגדולה ביותר היא בגודל זוגי. הראו שאפשר לחלק את המתחרים לשתי כיתות, כך שגודל הקליקה הגדולה ביותר בכיתה ראשונה תהיה שווה לגודל הקליקה הגדולה ביותר בכיתה השנייה.

פתרון: נתחיל מלבחור קליקה מקסימלית, ונשים את כל המתחרים בקליקה הזו בכיתה אחת ואת כל שאר המתחרים באחרת, לאנשים שלא בקליקה המקסימלית נקרא אנשים מסוג A ולאנשים מהקליקה המקורית נקרא מסוג C.

כרגע המצב הוא שבחדר הראשון יש קליקה שלפחות בגודל של כל קליקה בחדר השני, לכן נרצה להקטין אותה, בשביל זה נתחיל להעביר מתחרים מהחדר הראשון לחדר השני.

נשים לב שבמעבר כזה, הגודל של הקליקה המקסימלית בחדר הראשון קטנה באחד, ובחדר השני גדלה באחד או באפס, לכן מתישהו נגיע לאחד משני מקרים:

א. הקליקה המקסימלית בשני החדרים באותו הגודל.

ב. הקליקה המקסימלית בחדר הראשון גדולה באחד מהקליקה המקסימלית בחדר השני.

אם הגענו למקרה א', סיימנו, לכן נניח הגענו למקרה ב'. נקרא לאנשים מסוג C שעברו לחדר השני אנשים מסוג B.

נקרא לכמות האנשים שנשארו בחדר הראשון $k+1$, וכמות האנשים מסוג B תסומן r. ננסה להעביר איש נוסף מהחדר הראשון לחדר השני, אחרי המעבר, בחדר הראשון יש k אנשים, ובחדר השני יש קליקה מגודל k, לכן או שניצחנו, או שיש עכשיו קליקה מגודל $k+1$ בחדר השני (בפרט היא מכילה את האיש שהוספנו).

נניח הקליקה הזו לא מכילה איש מסוים מסוג B , אז נוכל להחזירו לחדר הראשון, ואז ננצח. לכן נניח בשלילה שכל קליקה כזו מכילה את כל האנשים מסוג B.

בפרט יש $k-r$ אנשים מסוג A שמחוברים לכל האנשים מסוג B (כי יש קליקה מגודל $k+1$ כשנוסיף איש מהחדר הראשון). מצד שני, לא יכול להיות שיש יותר אנשים כאלו, כי אז הייתה קליקה בגודל $k+1$ בחדר השני לפני שהוספנו איש נוסף.

מכאן נסיק שה-$k-r$ אנשים הללו, הם אותם אנשים עבור כל איש שנעביר מהחדר הראשון לשני, לכן אם נבחר אחד מהאנשים האלו, הוא מחובר לכל האנשים מהקליקה המקסימלית המקורית, ולכן מצאנו קליקה גדולה יותר! לכן חייב להתקיים $k-r=0$ אבל אז כמות האנשים בקליקה המקסימלית המקורית היא $2k+1$ בסתירה לנתון.

5. בארץ האגדית חיים דרקונים. לכל דרקון יש בדיוק 4 דרקונים אחרים שהם חברים שלו (החברות היא הדדית). הקוסם מרלין הגיע לארץ האגדית, מצא שני דרקונים שלא היו חברים, ונתן להם לשתות דלי מי קסם לכל אחד, והם נהיו חברים (אבל הם שטו את כל המים הקסומים שמרלין הביא). הוא גם מכיר קסם אופל שגורם לשני דרקונים שהם חברים לריב. הראו שכעת מרלין יכול לשלוח משלחת של מספר דרקונים לארץ התיכונה כך שבמשלחת לכל דרקון יהיו 3 חברים בדיוק.

פתרון. הפתרון הולך להשתמש בקסם אלגברי.

נצייר גרף בו הדרקונים הם קודקודים, ושני קודקודים מחוברים אם הם חברים (כולל החברות שמרלין יצר). נשים לב שהשאלה מבקשת להראות שיש תת גרף לא ריק שלכל קודקוד יש שלוש שכנים.

לכל צלע ניתן משתנה X_i, שמקבל מספרים מודולו 3. נסתכל על מערכת המשוואות הבאה:

לכל קודקוד v ניתן את המשוואה $F_v(X)=\sum_{v\in e} X_e{}^2=0$ כאשר $v\in e$ אומר שהקודקוד v נוגע בצלע e.

נשים לב לשני דברים: אם $X_e\neq 0$ אז $X_e{}^2=1(\bmod 3)$, ושבכל משוואה יש 4 או 5 מחוברים.

משני אלה אפשר לראות שאם הצבה מקיימת את המשוואות, אז לכל קודקוד או שלכל הצלעות שנוגעות בו $X_e=0$ או שבדיוק לשלוש מתוכן $X_e\neq 0$. לכן, אם נסתכל רק על הצלעות שהמשתנים שלהם שונים מאפס, והקודקודים שנוגעים בצלעות כאלו, לכל הקודקודים יהיו בדיוק שלוש צלעות!

נשאר להראות שיש פתרון שבו לא כל המשתנים הם אפס.

כדי לעשות זאת, נספור כמה פתרונות יש מודולו 3, את זה אפשר לעשות בצורה הבאה, אם נקרא למספר זה S אז:

$$S=\sum_X\prod_v(1-F_v(X)^2)(\bmod 3)$$

כאשר הסכום נילקח על כל ההצבות במשתנים, והמכפלה נלקחת על כל הקודקודים.

השוויון נובע מכך שאם אחד המשוואות לא מתקיימת, אז $1-F_v(X)^2=0$ עבור קודקוד כלשהו, ואחרת כולם שווים אחד.

נשים לב שאם יש n קודקודים, אז יש $2n+1$ צלעות, והדרגה של הפולינום בסכום היא $4n$. לכן אם נפתח סוגריים, בכל מונום יופיע משתנה בחזקה 1 או 0, כי אחרת כל החזקות היו לפחות 2 ואז הדרכה הייתה לפחות $4n+2$.

עכשיו נטען שעבור כל מונום הסכום על כל ההצבות הינו אפס, זה נכון לפי שתי הזהויות הבאות:

$$\sum_X X_1^{d_1}\cdot X_2^{d_2}\cdot\ldots\cdot X_{2n+1}^{d_{2n+1}}=\sum_{X_1} X_1^{d_1}\cdot\sum_{X_2} X_2^{d_2}\cdot\ldots\cdot\sum_{X_{2n+1}} X_{2n+1}^{d_{2n+1}}$$

$$\sum_{X_1}1=\sum_{X_1}X_1=0(\mathrm{mod}\,3)$$

מכיוון שקיבלנו שכמות הפתרונות מתחלקת בשלוש, ויש את הפתרון בו כל המשתנים אפס, חייב להיות פתרון נוסף לא אפסי, ולכן תת-גרף כמו שמבוקש בשאלה.

6. בטירה קסומה חיים 50 אבירים. לכל אחד יש לפחות K חברים. האם בהכרח ניתן לבחור 4 אבירים שניתן להושיב אותם סביב השולחן ישיבות עגול כך שכל אחד ישב ליד שני חבריו
א. אם $\mathrm{K}=4$?
ב. אם $\mathrm{K}=8$?
ג*. אם $\mathrm{K}=7$?

פתרון. א. נבנה גרף שמחולק ל-10 מעגלים (0,1,2,..,9), ובכל מעגל יש 5 אבירים (A,B,C,D,E). כך כל אביר יסומן על ידי ספרה ואות, למשל B2 או E0.

שתי הספרות נקראות סמוכות, אם זה $n,n+1$ או 0,9. לכל שתי ספרות סמוכות i,j ולכל אות O נגיד שהאבירים Oi ו- Oj חברים. בנוסף במעגלים 0,2,4,6,8 נגיד ש-A חבר של B, B חבר של C, C חבר של D, D חבר של E, ו-E חבר של A. במעגלים 1,3,5,7,9 נגיד את הדבר ההפוך: ש-A חבר של C, C חבר של E, E חבר של B, B חבר של D, ו-D חבר של A. במילים במעגלים הזוגיים ניקח צלעות של מחומש, ובמעגלים אי-זוגיים את האלכסונים.

לכל קל לבדוק שבדוגמה זאת לכל אחד יש 4 חברים, אבל אין 4 אבירים שאפשר להושיב סביב שולחן עגול.

ב. לכל אביר יש 8 חברים, וזה $\binom{8}{2}=28$ זוגות של חברים. סה"כ אם נספור את זוגות החברים של כולם נקבל $28\cdot 50$ זוגות. לפי שובך יונים, יש זוג שיופיע פעמיים, כי מבין 50 אנשים יש רק $\frac{50\cdot 49}{2}$ זוגות, שזה פחות. לכן קיים זוג אבירים, A ו-B, ששניהם גם חברים של C וגם חברים של D. לכן אפשר יהיה להושיב אותם בסדר A – C – B – D סביבה השולחן.

ג*. אפשר. הדוגמה שנציג תשתמש בגיאומטריה פרויקטיבית, אז רק אנשים שמכירים מישור פרויקטיבי יוכלו להבין.

המספר הכי קטן שאינו קטן מ-50 מהצורה q^2+q+1 הוא $7^2+7+1=57$. למזלנו, 7 הוא מספר ראשוני. לכן ניתן לבנות מישור פרויקטיבי עם 57 נקודות מעל השדה של 7 איברים.

ניקח דואליות כלשהי במישור פרויקטיבי זה, שמבוססת על שניונית לא מנוונת שיש בה נקודות במישור (כמה נקודות בעצם יש בה?). דואלי לנקודה P יסומן P^*. נדמיין 57 אבירים, כאשר כל אביר הוא נקודה במישור הפרויקטיבי. שני אבירים נחשבים לחברים, אם הישר הדואלי של אחד מהם מכיל את האחר. כך לכל אביר יש בדיוק 8 חברים (שזה כמות הנקודות בישר). יחד אם זאת, לא יכול להיות שיש 2 אבירים שונים אם אותם חברים משותפים, כי אז יש שני ישרים שונים במישור שנחתכים בשתי נקודות.

הבעיה היא שיש בטירה מקום רק ל-50 אבירים, ולכן 7 האבירים חייבים להעיף. ניקח נקודה A על השניונית שמגדירה דואליות, ואז A^* משיק לשניונית. אנחנו נעיף את A ועוד 6 נקודות כלשהן על A^*. לכל נקודה P שהיא לא A, הישר הדואלי הוא לא A^*, והישר P^* פוגש את A^* רק פעם אחד, לכן כל אביר יכול לאבד חבר אחד לכל היותר. ולכן לכל אביר שנשאר יש עדיין לפחות 7 חברים.