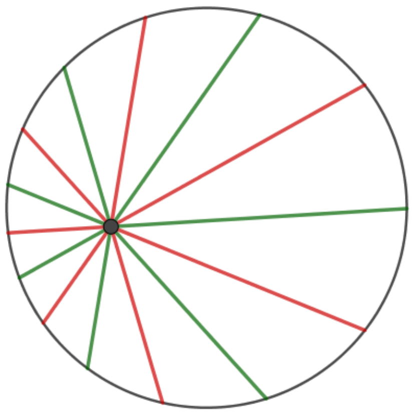
תרגיל 6



1. א. דרך נקודה O במישור העבירו 7 קווים, שמחלקים את המישור ל-7 זוויות שוות. מעגל שמכיל את O פוגש את הישרים ב-14 נקודות. הקטעים מ-O לנקודות החיתוך של המעגל עם הישרים נצבעו לחלופין בשני צבעים, אדום וירוק. הראו כי סכום הקטעים הירוקים שווה לסכום הקטעים האדומים.

פתרון ראשון. נתבונן במעגל שמרכזו P, במיתר AB במעגל, ובנקודה X על המיתר. נרצה לחשב את XA-XB. נסמן $\theta=\sphericalangle PXA$. נסמן את ההיטל של P על AB, שהוא אמצע הקטע, ב-M. נניח ללא הגבלת הכלליות ש-M בין X ל-A. אז מתקיים $XA-XB=(MA+MX)-(MB-MX)=2MX$. המשולש XMP הוא ישר זווית, ולכן מתקיים $XA-XB=2PX\cos\theta$. (אם M לא בין X ל-A, הקוסינוס פשוט יוצא שלילי).
לכן, אם יש לנו כמה מיתרים דרך נקודה אחת X כמו בשאלה, ההפרש בין סכום הקטעים האדומים לירוקים הוא למעשה סכום ההפרשים בין האדום לירוק בכל אחד מהמיתרים, כלומר ביטויים מהצורה XA-XB. לפי הנוסחה שקיבלנו זה יוצא $\cos\theta+\cos(\theta+\frac{2\pi}{7})+\ldots+\cos(\theta+\frac{2\pi}{7}\cdot 6)$ (כפול 2PX).
נשים לב שזה בעצם החלק הממשי של $e^{i\theta}+e^{i(\theta+2\pi/7)}+\ldots=e^{i\theta}(1+e^{2\pi i/7}+\ldots+e^{12\pi i/7})$. אבל ידוע שסכום שורשי היחידה הוא 0 (למשל ממשפט וייטא, כי הם השורשים של z^n-1 ולכן סכומם הוא המקדם שאחרי המוביל, כלומר 0. הסבר נוסף הוא שהסכום שלהם נשמר תחת כפל ב-$e^{2\pi i/7}$, כי זה רק משנה את הסדר שלהם, אבל מספר שכפול משהו שונה מ-0 נשאר אותו דבר הוא בהכרח 0). לכן נקבל מש"ל.

פתרון שני. נרצה לחשב את XA-XB, בסימונים של השאלה הקודמת. ראינו שזה 2MX, אבל MX זה ההיטל של הוקטור XP על המיתר AB. כלומר זו המכפלה הפנימית $\langle\overrightarrow{XP},v\rangle$, כאשר v וקטור יחידה בכיוון של הוקטור $\overrightarrow{XA}$. לכן, כמו בפתרון הראשון, ההפרש בין האדומים לירוקים זה סכום ההפרשים בכל מיתר, כלומר $\langle\overrightarrow{XP},v_1\rangle+\ldots+\langle\overrightarrow{XP},v_7\rangle=\langle\overrightarrow{XP},v_1+\ldots+v_7\rangle$, כאשר v_i וקטורי יחידה בכיוונים של הקטעים האדומים, כלומר וקטורי יחידה בכיוונים של שורשי היחידה מסדר 7 (עד כדי סיבוב). ראינו שסכום שורשי היחידה הוא 0, לכן נקבל מש"ל.

ב. במרחב תלת ממדי בחרו תיבה. בתיבה העבירו אלכסונים שמחברים את הקודקודים הנגדיים, שנפגשים במרכז. קודקודי התיבה צבועים בירוק ואדום, כך שכל שני קודקודים סמוכים שונים בצבע. כל קטע שמחבר את מרכז התיבה עם קודקוד צבוע בצבע של הקודקוד. קליפה כדורית חותכת את כל 8 הקטעים. הראו שסכום אורכי חלקי הקטעים האדומים שמוכלים בכדור שווים לסכום אורכי חלקי הקטעים הירוקים.

פתרון. נשתמש ברעיון של הפתרון השני. נסמן את התיבה ABCDEFGH, כאשר ABCD ו-EFGH הם פאות נגדיות בסדר קודקודים תואם. נסמן את מרכז התיבה ב-X. הקודקודים האדומים הם A,C,F,H. לכן נקבל שהפרש הסכומים הוא סכום ההפרשים, וכמו קודם נקבל שזה המכפלה הפנימית של הוקטור $\overrightarrow{XP}$ עם סכום וקטורי היחידה בכיוונים $\overrightarrow{XA}, \overrightarrow{XC}, \overrightarrow{XF}, \overrightarrow{XH}$. מכיוון ש-X הוא מרכז הקובייה, הם באותו אורך, לכן זה פרופורציונלי לסכום הוקטורים האלה. לא קשה לראות שסכום זה הוא 0 – למשל כי $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XC}$ הוא הוקטור מ-X למרכז הפאה ABCD, ואילו $\overrightarrow{XF}+\overrightarrow{XH}$ הוא הוקטור מ-X למרכז הפאה EFGH, וסכומם 0 בבירור. מש"ל.

2. נתון מעגל שרדיוסו R.

א. המיתרים AC ו-BD נפגשים בנקודה פנימית X העיגול בזווית ישרה. הראו כי

$$\mathrm{XA}^2+\mathrm{XB}^2+\mathrm{XC}^2+\mathrm{XD}^2=4R^2.$$

ב. המיתרים MN, PQ, ST נפגשים בנקודה פנימית Y, ויוצרים זווית של 60° זה עם זה. הראו כי

$$\mathrm{YM}^2+\mathrm{YN}^2+\mathrm{YP}^2+\mathrm{YQ}^2+\mathrm{YS}^2+\mathrm{YT}^2=6R^2.$$

ג. הכלילו את הסעיפים הקודמים.

פתרון. מכיוון שהזוויות $\sphericalangle\mathrm{AXB}, \sphericalangle\mathrm{CXD}$ ישרות, נקבל $\mathrm{XA}^2+\mathrm{XB}^2+\mathrm{XC}^2+\mathrm{XD}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{CD}^2$. בגלל שהזווית בין המיתרים ישרה, נקבל שסכום אורכי הקשתות AB,CD הוא חצי מעגל. לכן אם נזיז את המיתרים AB, CD כך שיהיה להם קודקוד משותף, הזווית ביניהן תישען על חצי מעגל ולכן תהיה ישרה, ויתר על כן, היתר במשולש ישר הזווית שייווצר הוא קוטר המעגל. לכן נקבל $\mathrm{AB}^2+\mathrm{CD}^2=(2R)^2=4R^2$.

ב. המיתרים MN, PQ, ST נפגשים בנקודה פנימית Y, ויוצרים זווית של 60° זה עם זה. הראו כי

$$\mathrm{YM}^2+\mathrm{YN}^2+\mathrm{YP}^2+\mathrm{YQ}^2+\mathrm{YS}^2+\mathrm{YT}^2=6R^2.$$

פתרון. ניזכר בסיטואציה משאלה 1א – יש לנו מעגל שמרכזו P, מיתר AB שאמצעו M, ונקודה X עליו. נסמן גם, כמו קודם, $\theta=\sphericalangle\mathrm{PXA}$. לה"כ M בין X ל-A, כלומר θ חדה. מתקיים ש-$XA=MA+MX,\ XB=MB-MX=MA-MX$. נסמן $PX=d$. ראינו כבר ש-$MX=d\cos\theta$. משום שהמשולש PMA ישר זווית, נקבל $MA^2=R^2-PM^2=R^2-d^2\sin^2\theta$. מפה נקבל:

$$XA^2+XB^2=(MA+MX)^2+(MA-MX)^2=2(MA^2+MX^2)=$$
$$=2(R^2-d^2\sin^2\theta+d^2\cos^2\theta)=2(R^2+d^2\cos2\theta)$$

בסיטואציה בשאלה, יש לנו את הנקודה Y, ויש לנו 3 מיתרים דרכה, בזוויות $\frac{\pi}{3}$ ביניהם, ואנחנו מסתכלים על סכום ריבועי הקטעים. זה סכום ריבועי שני החלקים של כל מיתר, על פני כל המיתרים.

אז לפי החישוב שלנו, נקבל שזה

$$\sum_{i=1,2,3} 2(R^2+d^2\cos 2\theta_i) = 6R^2+2d^2(\cos(2\theta)+\cos(2(\theta+\frac{\pi}{3}))+\cos(2(\theta+\frac{2\pi}{3}))) =$$

$$=6R^2+2d^2(\cos(2\theta)+\cos(2\theta+\frac{2\pi}{3})+\cos(2\theta+\frac{4\pi}{3}))$$

ראינו בשאלה 1א שסכום קוסינוסים כזה הוא 0. לכן נקבל שנשאר $6R^2$. מש"ל.

ג. הכלילו את הסעיפים הקודמים.

פתרון. הנה הכללה טבעית – המיתרים $A_1B_1,...,A_nB_n$ נפגשים בנקודה פנימית X, ומחלקים את המישור לזוויות שוות. אז $A_1X^2+...+A_nX^2+B_1X^2+...+B_nX^2=2nR^2$. ההוכחה כמעט זהה להוכחה של סעיף ב.

3. במרובע נתונים הזווית בין האלכסונים $\varphi\neq 90^\circ$ ואורכי הצלעות a,b,c,d בסדר זה. מצאו נוסחה לשטח המרובע באמצעות a,b,c,d,φ.

פתרון. נסמן את קודקודי המרובע ABCD, כך ש- $AB=a,\ BC=b,\ CD=c,\ DA=d$. נסמן את מפגש האלכסונים ב-P, ונסמן $PA=w,\ PB=x,\ PC=y,\ PD=z$. בנוסף, נניח $\sphericalangle APB=\varphi$. נשים לב ששטח המרובע הוא סכום שטחי המשולשים PAB,…,PDA, כלומר

$$S=wx\sin\varphi+xy\sin(\pi-\varphi)+yz\sin\varphi+zw\sin(\pi-\varphi)=(wx+xy+yz+zw)\sin\varphi$$

נרשום לפי משפט הקוסינוסים:

$$a^2=w^2+x^2-2wx\cos\varphi$$
$$b^2=x^2+y^2+2xy\cos\varphi$$
$$c^2=y^2+z^2-2yz\cos\varphi$$
$$d^2=z^2+w^2+2zw\cos\varphi$$

נרצה לבטל את הריבועים ולהישאר עם המכפלות. למעשה, קל לראות ש-

$$S=\frac{1}{2}(b^2+d^2-a^2-c^2)\cdot\frac{1}{\cos\varphi}\cdot\sin\varphi=(b^2+d^2-a^2-c^2)\frac{\tan\varphi}{2}.$$

4. במרובע קמור אורכי הצלעות a,b,c,d, שתי זווית נגדיות הן α ו- γ, וגם $p=\dfrac{a+b+c+d}{2}$.
הראו כי שטח המרובע הוא $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cdot\cos^2\dfrac{\alpha+\gamma}{2}}$.

פתרון. נניח כי α הזווית בין a,b. נשים לב שהשטח הוא

$$S=\frac{1}{2}(ab\sin\alpha+cd\sin\gamma).$$

בנוסף נקבל משוואה שנובעת מחישוב אורך האלכסון על ידי משפט הקוסינוסים:

$$(*)\qquad a^2+b^2-2ab\cos\alpha=c^2+d^2-2cd\cos\gamma$$

נעלה את השטח בריבוע, כי בנוסחא שרוצים להראות יש שורש. נקבל

$$4S^2=a^2b^2\sin^2\alpha+2abcd\sin\alpha\sin\gamma+c^2d^2\sin^2\gamma$$

מהמשוואה (*) נקבל (ע"י העברת אגפים והעלאה בריבוע):

$$(a^2+b^2-c^2-d^2)^2=4(a^2b^2\cos^2\alpha-2abcd\cos\alpha\cos\gamma+c^2d^2\cos^2\gamma)$$

מכאן נקבל

$$a^2b^2\sin^2\alpha+c^2d^2\sin^2\gamma=a^2b^2(1-\cos^2\alpha)+c^2d^2(1-\cos^2\gamma)=$$

$$=a^2b^2+c^2d^2-(\frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+2abcd\cos\alpha\cos\gamma)$$

לכן נקבל

$$4S^2=2abcd\sin\alpha\sin\gamma+a^2b^2+c^2d^2-\frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2-d^2)^2-2abcd\cos\alpha\cos\gamma=$$

$$=a^2b^2+c^2d^2-\frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2-d^2)^2-2abcd\cos(\alpha+\gamma)=$$

$$=a^2b^2+c^2d^2-\frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2-d^2)^2-2abcd(2\cos^2(\frac{\alpha+\gamma}{2})-1)=$$

$$=(ab+cd)^2-\frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2-d^2)^2-4abcd\cos^2(\frac{\alpha+\gamma}{2})$$

מצד שני,

$$(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)=\frac{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}{16}=$$

$$=\frac{1}{16}(c+d+(a-b))(c+d-(a-b))(a+b+(c-d))(a+b-(c-d))=$$

$$=\frac{1}{16}((c+d)^2-(a-b)^2)((a+b)^2-(c-d)^2)=$$

$$=\frac{1}{16}(2ab+2cd+c^2+d^2-a^2-b^2)(2ab+2cd-(c^2+d^2-a^2-b^2))=$$

$$=\frac{1}{16}(4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2)=\frac{1}{4}(ab+cd)^2-\frac{1}{16}(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$$

סך הכל, נקבל כי

$$S^2=\frac{1}{4}(ab+cd)^2-\frac{1}{16}(a^2+b^2-c^2-d^2)-abcd\cos^2(\frac{\alpha+\gamma}{2})=$$

$$=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2(\frac{\alpha+\gamma}{2})$$

מש"ל.

הערה. נוסחא זו ידועה בשם נוסחת Bretschneider.

5. הפונקציה $f(x)=1-A\cdot\cos(2x)-B\cdot\sin(2x)-a\cdot\cos(x)-b\cdot\sin(x)$ מקיימת $f(x)\geq 0$ לכל x. הוכיחו כי $A^2+B^2\leq 1$, $a^2+b^2\leq 2$, $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{A^2+B^2}\leq 2$.

האם אפשר לשפר את אחד החסמים?

פתרון. ככלל, ביטוי מסוג $a\cos x+b\sin x$ מתאר את הקואורדינאטה הראשונה של ווקטור שמתחיל מ-(a,b) ומסתובב במהירות זוויתית 1. באופן דומה, $A\cos(2x)+B\sin(2x)$ מתאר קואורדינאטה ראשונה של הווקטור שמתחיל בתור (A,B) ומסתובב במהירות הזוויתית 2.

כאשר מסובבים את הווקטור (A,B) בזווית $2x$ כך שהוא יהיה מכוון לימין, נקבל

$$A\cos(2x)+B\sin(2x)=\sqrt{A^2+B^2}$$

וגם כאשר נחליף x ב-$x+\pi$ נקבל שוב אותו ערך. באחד משני המקרים $a\cos x+b\sin x$ יהיה אי-חיובי, ובמקרה האחר אי-שלילי, לכן ניתן לבחור מקרה בו $a\cos(x)+b\sin(x)\geq 0$. במקרה זה נקבל

$$A\cos(2x)+B\sin(2x)+a\cos(x)+b\sin(x)\geq\sqrt{A^2+B^2}$$

אבל אז $f(x)\geq 0$ לכן $\sqrt{A^2+B^2}\leq 1$. הוכחנו את אי-השוויון הראשון.

כעת נדבר על סיבובים של הווקטור (a,b). ניתן לסובב אותו כך שהוא יהיה בכיוון ימינה, ואז נקבל $a\cos x_0+b\sin x_0=\sqrt{a^2+b^2}$. אבל אם נגדיל או נקטין את הזווית ב-45° נקבל ווקטור אלכסוני, ואז קואורדינאטה ראשונה תקטן פי $\sqrt{2}$:

$$a\cdot\cos\left(x_0+45^\circ\right)+b\cdot\sin\left(x_0+45^\circ\right)=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2}}$$
$$a\cdot\cos\left(x_0-45^\circ\right)+b\cdot\sin\left(x_0-45^\circ\right)=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2}}$$

ההפרש הזווית בין שני המצבים האלה הוא 90°.

אם נציב את $x_0\pm 45^\circ$ בביטוי $A\cdot\cos(2x)+B\cdot\sin(2x)$, נקבל קואורדינאטה ראשונה של שני מצבים לווקטור (A,B) שמסובב בשתי זוויות שונות שנבדלות ב-180°. המספרים שנקבל הפוכים: אחד אי-שלילי, והשני אי-חיובי. נבחר את המצב האי-שלילי, ואז

$$a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x) + A \cdot \cos(2x) + B \cdot \sin(2x) \ge \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2}}$$

אבל $f(x) \ge 0$ ולכן $1 \ge \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2}}$, כלומר $2 \ge a^2+b^2$. הוכחנו את אי-השוויון השני.

כעת נסתכל על אותו הערך של x_0, אבל גם על $x_0 \pm 60^\circ$. נקבל

$$a\cos\left(x_0+60^\circ\right)+b\sin\left(x_0+60^\circ\right)=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

$$a\cos\left(x_0-60^\circ\right)+b\sin\left(x_0-60^\circ\right)=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

הזוויות $2\left(x_0-60^\circ\right), 2x_0, 2\left(x_0+60^\circ\right)$ במרחק של 120° זה מזה. לכן אם נסובב את הווקטור (A,B) בזוויות האלה, לפחות אחד יהיה בשליש מעגל הימני ויוצר זווית של לכל היותר 60° אם הכיוון ימינה. ה x הזה, נקרא לו x_1 יקיים

$$a\cos\left(x_1\right)+b\sin\left(x_1\right) \ge \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

$$A\cos\left(2x_1\right)+B\sin\left(2x_1\right) \ge \frac{\sqrt{A^2+B^2}}{2}$$

אבל גם $f\left(x_1\right) \ge 0$ ולכן $1 \ge \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}+\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{2}$. כלומר בעצם הוכחנו את אי-השוויון השלישי.

כאשר מסתכלים על כל אחת מ-3 ההוכחות, אפשר להבין איך להגיע לשוויון בכל מקרה.

אם $a=b=0$ אבל $A^2+B^2=1$ נקבל שוויון באי-השוויון הראשון.

אם $A=-1, a=\sqrt{2}, B=b=0$ נקבל שוויון באי-שוויון השני. הפעם לא ברור שזה מקיים את התנאים וכדאי לבדוק.

נסמן בקיצור $\cos x = c$, אז $\cos 2x = 2c^2 - 1$ ולכן צריך לבדוק כי $1 \geq -\frac{1}{2}\left(2c^2-1\right) + \sqrt{2}\cdot c$,
לכל $-1 \leq c \leq 1$, במילים אחרות $c^2 - \sqrt{2}\cdot c + \frac{1}{2} \geq 0$, כלומר $\left(c - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \geq 0$.

אם $A = -\frac{2}{3}, a = \frac{4}{3}, B = b = 0$, נקבל שוויון באי-שוויון השלישי, ושוב צריך לבדוק שלכל x מתקיים $1 \geq -\frac{2}{3}\cdot\cos(2x) + \frac{4}{3}\cdot\cos(x)$, במילים אחרות $1 - \frac{4}{3}c + \frac{2}{3}\left(2c^2-1\right) \geq 0$, כלומר $4c^2 - 4c + 1 \geq 0$ כלומר $\left(2c-1\right)^2 \geq 0$.

6. במשולש ABC שזוויותיו הן α, β, γ, עקבי הגבהים הם F, E, D. רדיוס המעגל החסום ב-DEF הוא ρ, ורדיוס המעגל החוסם את ABC הוא R. חשבו את $\frac{\rho}{R}$ ואת $\frac{S_{\mathrm{DEF}}}{S_{\mathrm{ABC}}}$ באמצעות α, β, γ.

פתרון. נגיד שהגבהים AD, BE, CF נפגשים בנקודה H. יש מספר טענות שעוזרות לפתור את השאלה.

טענה 1. בסימונים של השאלה: $\mathrm{AH} = 2R\cos\alpha, \quad \mathrm{BH} = 2R\cos\beta, \quad \mathrm{CH} = 2R\cos\gamma$, כמו כן $\mathrm{DH} = 2R\cos\beta\cos\gamma, \quad \mathrm{EH} = 2R\cos\alpha\cos\gamma, \quad \mathrm{FH} = 2R\cos\alpha\cos\beta$.

טענה 2. רדיוסי המעגלים החוסמים של המשולשים ABC, ABH, ACH, BCH שווים.

טענה 3. אם α, β, γ חדות, במשולש DEF חוצי הזוויות הם הגבהים של המשולש המקורי, בפרט H הוא מרכז המעגל החסום. באופן דומה, A, B, C הם מרכזי המעגלים החסומים מבחוץ עבור המשולש DEF.

נוסחת אוילר. במשולש שבו רדיוס המעגל החסום הוא r ושל החוסם הוא R, ומרחק בין המרכזים של המעגל החסום והחוסם הוא d, מתקיימת הנוסחה $d^2 = R^2 - 2Rr$.

באמצעות טענות אלו, קל לפתור את השאלה. אנחנו נפתור את השאלה למשולש חד-זוויות ונשאיר לכם להכליל את הטענה למקרה של משולש כהה זוויות (טענה 2 יכולה לעזור).

מעגל 9 הנקודות של משולש ABC הוא המעגל החוסם של המשולש DEF. רדיוסו $\frac{R}{2}$, כי זה גם מעגל האמצעים של משולש ABC. אם ניישם את נוסחת אוילר למשולש DEF שרדיוס המעגל החוסם שלו $\frac{R}{2}$ ושל החסום ρ נקבל שדרגת הנקודה H ביחס למעגל הוא $d^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = -R\rho$

ומצד שני $\mathrm{DH}\cdot\mathrm{HK}-$ כאשר K הוא באמצע של AH. לפי טענה 1, $\mathrm{DH}=2R\cos\beta\cos\gamma$, וגם $\mathrm{HK}=R\cos\alpha$. ובכן, $R\rho=2R^2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma$. מכאן $\frac{\rho}{R}=2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

אפשר לעבור מהרדיוסים לשטחים. אכן, שטח של המשולש ABC הוא

$$S_{\mathrm{ABC}}=\frac{abc}{4R}=\frac{2R\sin\alpha\cdot2R\sin\beta\cdot2R\sin\gamma}{4R}=2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

במשולש DEF אפשר להשתמש באותה נוסחה אם יודעים את הזוויות שלו. זווית HDE שווה לזווית HCE שהיא זווית FCA שמשלימה את זווית α ל- 90°. זווית HDF זהה ל-HDE (לפי טענה 3). לכן הזווית D במשולש EDF היא $180^\circ-2\alpha=2\cdot\left(90^\circ-\alpha\right)$. באופן דומה מחשבים זוויות אחרות של משולש DEF, ולכן $S_{\mathrm{DEF}}=\frac{R^2}{2}\sin\left(2\alpha\right)\sin\left(2\beta\right)\sin\left(2\gamma\right)$. לכן יחס השטחים הוא

$$\frac{S_{\mathrm{DEF}}}{S_{\mathrm{ABC}}}=\frac{\frac{R^2}{2}\sin\left(2\alpha\right)\sin\left(2\beta\right)\sin\left(2\gamma\right)}{2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}=2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

הערה. אפשר גם לקשר בין שני החלקים של השאלה ולהסיק אחד מהשני.

אכן, ניתן להשתמש בנוסחה $S=pr$ עבור המשולש DEF, ולקבל כי

$$S_{\mathrm{DEF}}=\rho\cdot\frac{\mathrm{DE}+\mathrm{EF}+\mathrm{FD}}{2}.$$

אם O מסמן את מרכז המעגל החוסם של המשולש ABC, מסתבר ש-OA מאונך ל-EF, OB מאונך ל-DF, OC מאונך ל-DE. כאשר במרובע אלכסונים מאונכים, שטחו שווה למחצית המכפלה של אלכסוניו. לכן $S_{\mathrm{ABC}}=S_{\mathrm{ODBF}}+S_{\mathrm{ODCE}}+S_{\mathrm{OEAF}}=\frac{R}{2}\cdot\left(\mathrm{FD}+\mathrm{DE}+\mathrm{EF}\right)$.

יחס של שתי הזהויות מראה כי $\frac{S_{\mathrm{DEF}}}{S_{\mathrm{ABC}}}=\frac{\rho}{R}$.

הוכחת טענה 1. תהיה Gנקודה שמשלימה את המקבילית HBGC. הקטע BG מקביל ל-HC ולכן מאונך ל-AB. באופן דומה CG מקביל ל-BH ומאונך ל-AC. לכן במרובע ABGC הזוויות B ו- C

ישרות, לכן AG הוא הקוטר של המעגל החוסם ואורכו $2R$. משולש ABG ישר זווית, הזווית G שווה ל- γ לכן $\mathrm{AB}=2R\sin\gamma$ (שזה בעצם משפט סינוסים) ו- $\mathrm{CH}=\mathrm{BG}=2R\cos\gamma$.

באופן דומה מקבלים גם $\mathrm{AH}=2R\cos\alpha,\quad \mathrm{BH}=2R\cos\beta$.

משולש BHD הוא ישר זווית. הזווית H במשולש זה היא γ (כי הזווית בין הגבהים שווה לזווית בין הצלעות), ולכן $\mathrm{DH}=\mathrm{BH}\cdot\cos\gamma=2R\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma$. בדומה גם EH ו-FH.

הוכחת טענה 2. מספיק להוכיח שלאחר שיקוף ביחס ל-AB המעגל החוסם של המשולש ABH יהפוך למעגל החוסם של המשולש ABC. כלומר מספיק להראות שהזווית AHB משלימה את הזווית ACB ל- 180°. זה בדיוק השיקול שהשתמשנו גם בהוכחה הקודמת – שהזווית בין הגבהים שווה לזווית בין הצלעות.

טענה 3. מעגל שקוטרו BH עובר גם דרך D ו-F. מעגל שקוטרו CH עובר גם דרך D ו-E. מעגל שקוטרו BC עובר דרך F ו-E. לכן

$$\sphericalangle\mathrm{HDE}=\sphericalangle\mathrm{HCE}=\sphericalangle\mathrm{FCE}=\sphericalangle\mathrm{EBF}=\sphericalangle\mathrm{HBF}=\sphericalangle\mathrm{HDF}.$$

לכן HD חוצה זווית במשולש DEF (ובאופן דומה גם HE, HF).

גם BC הוא חוצה זווית אחר של משולש DEF (נגיד אם DH הוא פנימי, אז BDC הוא החיצוני), כי חוצי זווית פנימי וחיצוני באותה נקודה, הם מאונכים זה לזה.

מכאן הנקודות H, C, B, A הם המרכזים של המעגלים החסומים מבפנים ומבחוץ למשולש DEF.

נותר להוכיח את נוסחת אוילר מבין הטענות שהשתמשנו. ניקח משולש ABC, נסמן ב-I את נקודת המפגש של חוצי זוויות. נמשיך את הישר AI עד שיפגוש שוב את המעגל החוסם בנקודה M.

נזכיר את משפט התלתן: $\mathrm{BM}=\mathrm{CM}=\mathrm{IM}$.

הוכחה לנוסחת אוילר. אם מרחק בין I למרכזה המעגל החוסם הוא d, אז לפי דרגת נקודה, $R^2-d^2=\mathrm{BI}\cdot\mathrm{IM}$. אבל לפי משפט התלתן ומשפט סינוסים $\mathrm{IM}=\mathrm{IB}=2R\sin\frac{\alpha}{2}$. אם נוריד אנך מ-I לצלע AB, אורך האנך יהיה r, ולכן $\mathrm{BI}=\dfrac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. לכן

$$R^2-d^2=2R\cancel{\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{r}{\cancel{\sin\frac{\alpha}{2}}}=2Rr.$$