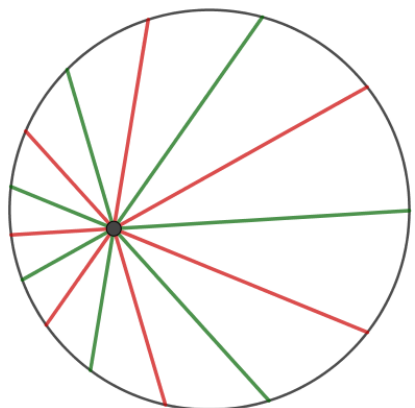


תרגיל 6



1. א. דרך נקודה O במישור העבירו 7 קווים, שמחלקים את המישור ל-7 זוויות שוות. מעגל שמכיל את O פוגש את הישרים ב-14 נקודות. הקטעים מ-O לנקודות החיתוך של המעגל עם הישרים נצבעו לחלופין בשני צבעים, אדום וירוק. הראו כי סכום הקטעים הירוקים שווה לסכום הקטעים האדומים.
 ב. במרחב תלת ממדי בחרו תיבה. בתיבה העבירו אלכסונים שמחברים את הקודקודים הנגדיים, שנפגשים במרכז. קודקודי התיבה צבועים בירוק ואדום, כך שכל שני קודקודים סמוכים שונים בצבע. כל קטע שמחבר את מרכז התיבה עם קודקוד צבוע בצבע של הקודקוד. קליפה כדורית חותכת את כל 8 הקטעים. הראו שסכום אורכי חלקי הקטעים האדומים שמוכלים בכדור שווים לסכום אורכי חלקי הקטעים הירוקים.

2. נתון מעגל שרדיוסו R.

א. המיתרים AC ו-BD נפגשים בנקודה פנימית X העיגול בזווית ישרה. הראו כי

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 + XD^2 = 4R^2.$$

ב. המיתרים MN, PQ, ST נפגשים בנקודה פנימית Y, ויוצרים זווית של 60° זה עם זה. הראו כי

$$YM^2 + YN^2 + YP^2 + YQ^2 + YS^2 + YT^2 = 6R^2.$$

ג. הכלילו את הסעיפים הקודמים.

3. במרובע נתונים הזווית בין האלכסונים $\varphi \neq 90^\circ$ ואורכי הצלעות a, b, c, d בסדר זה. מצאו נוסחה לשטח המרובע באמצעות a, b, c, d, φ .

4. במרובע קמור אורכי הצלעות a, b, c, d , שתי זווית נגדיות הן α ו- γ , וגם $p = \frac{a+b+c+d}{2}$.

$$. S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cdot \cos^2 \frac{\alpha + \gamma}{2}}$$

הראו כי שטח המרובע הוא

5. הפונקציה $f(x) = 1 - A \cdot \cos(2x) - B \cdot \sin(2x) - a \cdot \cos(x) - b \cdot \sin(x)$ מקיימת

$f(x) \geq 0$ לכל x . הוכיחו כי $a^2 + b^2 \leq 2, A^2 + B^2 \leq 1$, $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{A^2 + B^2} \geq 2$. האם אפשר לשפר את אחד החסמים?

6. במשולש ABC שזוויותיו הן α, β, γ , עקבי הגבהים הם D, E, F. רדיוס המעגל החסום ב-DEF

הוא ρ , ורדיוס המעגל החוסם את ABC הוא R. חשבו את $\frac{\rho}{R}$ ואת $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}}$ באמצעות α, β, γ .