תרגיל 5

1. נתונה סדרה של מספרים ממשיים חיוביים $a_1, a_2, a_3, \ldots$ כך שעבור כל i מתקיים:

$$a_i = |a_{i+1} - a_{i+2}|$$

האם הסדרה יכולה להיות חסומה?

תשובה. לא.

פתרון. נניח כי $a_{n+3} \le a_{n+2}$ וגם $a_{n+3} \le a_{n+1}$. אז $a_{n+2} - a_{n+3} = a_{n+1}$ כלומר $a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+3}$ ולכן $a_n = a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+3}$. ז. א. אם בשלושה מסוימת המספר המינימלי הוא המספר האחרון, אז יש מספר כזה גם קודם; לכן המספר המינימלי בסדרה הוא אחד מבין a_1, a_2, a_3.

נסמן את המספר המינימלי בסדרה ב- m.

לפיה הנתון $a_i = |a_{i+1} - a_{i+2}|$, כאשר כל המספרים חיוביים, לכן $a_i < a_{i+1}$ או $a_i < a_{i+2}$. נסמן ב- A את המספר הגדול יותר מבין a_{i+1}, a_{i+2}, ואת המספר הקטן יותר ב- α. אז $A - \alpha = a_i$ ולכן

$$A = a_i + \alpha \ge a_i + m$$

ובכן, מבין שני המספרים הבאים אחרי a_i יש מספר שהוא לפחות $a_i + m$. לכן מבין $2n$ המספרים הראשונים בסדרה, יש מספר שהוא לפחות $m \cdot n$. מש"ל.

2. עבור מספר טבעי a נסמן $\overline{a}$ המספר המתקבל על ידי הפיכת סדר הספרות, למשל $\overline{146} = 641$.
סדרה a_i מוגדרת בעזרת כלל הנסיגה $a_{i+1} = a_i + \overline{a_i}$.
האם יכול להיות ש- a_7 ראשוני?

פתרון. אם ניקח מספר שאורכו זוגי, $a = s_0 + s_1 \cdot 10 + s_2 \cdot 10^2 + \ldots + s_{2k-1} \cdot 10^{2k-1}$ כאשר s_i ספרותיו, אז $\overline{a} = s_0 \cdot 10^{2k-1} + s_1 \cdot 10^{2k-2} + s_2 \cdot 10^{2k-3} + \ldots + s_{2k-1}$, וסכומם יהיה

$$a + \overline{a} = s_0 \cdot \left(1 + 10^{2k-1}\right) + s_1 \cdot \left(10 + 10^{2k-2}\right) + s_2 \cdot \left(10^2 + 10^{2k-3}\right) + \ldots$$

וזה מתחלק ב-11.

קל לראות שגם אם a מתחלק ב-11 אז גם $\overline{a}$ מתחלק ב-11, ולכן אם איבר אחד לפחות בסדרה מתחלק ב-11 אז גם כל האיברים הבאים. לכן מספיק להראות שמבין המספרים $a_1, a_2, \ldots, a_6$ לפחות אחד הוא באורך זוגי. אולי נצטרך לבדוק בנוסף שהמספר הוא לא 11 עצמו, אבל 11 יכול להיתקבל רק עם איבר הקודם הוא 10, וזה רק אם האיבר לפניו הוא 5, ואין אף מספר שהופך ל-5.

המספר בשלב הבא יכול להיות יותר ארוך בספרה אחת לכל היותר מהמספר הקודם. לכן אם יש שני מספרים בעלי אורך שונה, אז יש גם מספר באורך זוגי. אם אין שני מספרים באורך שונה, אז המספרים $a_1, a_2, ..., a_6$ הם באותו אורך. כאשר עוברים מ-a_i ל-a_{i+1}, הספרה המובילה של המספר החדש מתקבלת כסכום של הספרה המובילה של הספרה הקודם ושל האחרונה, וכך מתקבלת גם הספרה האחרונה (אין גרירה כי אז המספר נהיה יותר ארוך).

לכן הספרה האחרונה והמובילה של a_2 שתיהן לפחות 1, הספרה המובילה והאחרונה של a_3 שתיהן לפחות 2, הספרה האחרונה והמובילה של a_4 שתיהן לפחות 4, הספרה המובילה והאחרונה של a_5 שתיהן לפחות 8. לכן לא יתכן שגם a_6 הוא באותו אורך.

3. עבור מספר ממשי x נסמן $\lfloor x \rfloor$ המספר השלם הגדול ביותר שקטן מ-x, ו-$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ החלק השברי של x, סדרה x_i מקיימת:

$$x_{i+1} = \lfloor x_i \rfloor \cdot \{x_i\}$$

הוכיחו שעבור i גדול מספיק $x_{i+2} = x_i$.

פתרון. אם x_1 אי-שלילי, אז כל מספר בסדרה אי-שלילי. אם $x_i \geq 1$, אז x_{i+1} הוא מספר קטן יותר, אפילו החלק השלם שלו קטן יותר. לכן תוך לכל היותר $\lfloor x_1 \rfloor$ צעדים הסדרה תגיע למספרים שהם בין 0 ל-1, ובצעד הבא הסדרה תגיע ל-0 ומאז יהיו רק אפסים.

אם x_1 שלילי, נסתכל על הערך התחתון של x_1, זו בבירור סדרה עולה, וחסומה על ידי אפס, ולכן מאיזושהי נקודה היא תהיה קבועה, כלומר לכל n גדול מספיק $-m \leq x_n < -m+1$ עבור m שלם חיובי.

נרשום את נוסחת הנסיגה מהנקודה הזו, $x_{n+1} = -m(x_n + m) = -mx_n - m^2$, נוכל לרשום אותה מחדש בתור $x_{n+1} + \dfrac{m^2}{m+1} = -m\left(x_n + \dfrac{m^2}{m+1}\right)$, ולכן הסדרה היא מהצורה

$$x_n = C(-m)^n - \frac{m^2}{m+1}$$

אם $C = 0$ הסדרה קבועה, אם $m \neq 1$ הסדרה לא יכולה להיות חסומה, ותתקבל סתירה, ואם $m = 1$ יש לה מחזור 2, בכל מקרה ניצחנו.

4. נתון p ראשוני אי-זוגי כך ש-$p-2$ מתחלק ב-3. נגדיר $a_k = k^2 + k + 1$, חישבו את המכפלה:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{p-1}$$

מודולו p.

פתרון. נוכיח טענה: למשוואה $x^3 = a \pmod p$ יש פתרון x יחיד לכל a.

אכן, $p = 3q+2$, ולכן $\left(a^{2q+1}\right)^3 = a^{6q+3} = a^p \cdot a^p \cdot a = a \cdot a \cdot a = a^3 \pmod p$, כלומר לכל a יש פתרון $x = a^p$, ומצד שני גם לכל x יש a, לכן יש התאמה של אחד לאחד.

אם נשים בצד את 1 ואת 0, נגלה ש- $2^3, 3^3, \ldots, (p-1)^3$ זה אותם מספרים כמו $2, 3, \ldots, p-1$ מודול p רק אולי בסדר אחר. לכן

$$a_2 \cdot \ldots \cdot a_{p-1} = \prod_{k=2}^{p-1}\left(k^2+k+1\right) = \prod_{k=2}^{p-1}\frac{k^3-1}{k-1} = 1 \pmod p$$

לכן $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{p-1} = a_1 = 3 \pmod p$.

5. נגדיר סדרה בצורה הבאה:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{2i} = -x_i \\ x_{2i-1} = (-1)^{i+1} x_i \end{cases}$$

הוכיחו שעבור כל n הסכום $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ אי-שלילי.

פתרון. נשים לב כי

$$x_{4k+1} = (-1)^{2k+2} x_{2k+1} = x_{2(k+1)-1} = (-1)^k x_{k+1},$$

$$x_{4k+2} = -x_{2k+1} = (-1)^{k+1} x_{k+1},$$

$$x_{4k+3} = x_{2(2k+2)-1} = (-1)^{2k+3} x_{2k+2} = x_{k+1},$$

$$x_{4k+4} = -x_{2k+2} = x_{k+1}.$$

לכן בפרט $x_{4k+1} + x_{4k+2} = 0$ ו- $x_{4k+1} + x_{4k+2} + x_{4k+3} + x_{4k+4} = 2x_{k+1}$. נסמן ב- s_k את סכום k האיברים הראשונים בסדרה. ממה שאמרנו קל לראות ש- $s_{4k+2} = s_{4k} = 2s_k$.

נוכיח ש- s_n אי שלילי בעזרת אינדוקציה על רביעיות של מספרים. נניח שכל הסכומים עד $4k$ אי-שליליים ונוכיח שגם עד $4k+4$. ברור $s_{4k+2} \geq 0$ כי הוא שווה ל- s_{4k}, אם נוכיח ש- $s_{4k+3} \geq 0$ אז יהיה ברור שגם $s_{4k+4} \geq 0$ ולכן נשער להוכיח רק עבור s_{4k+1} ו- s_{4k+3}.

נניח בשלילה כי $s_{4k+1}<0$ כלומר $s_{4k}=0$ וגם $x_{4k+1}=-1$ אבל $0=s_{4k}=2s_k$ ולכן $s_k=0$ אבל $s_{k+1}=1$ כי הנחנו באינדוקציה ש- $s_{k+1}\ge 0$ לכן $x_{k+1}=1$. אבל אנו יודעים כי $-1=x_{4k+1}=(-1)^k x_{k+1}=(-1)^k$. כלומר k צריך להיות אי-זוגי. מצד שני $s_k=0$ ולכן k צריך להיות זוגי כי הסכום יכול להתאפס רק במקומות זוגיים כי $s_k=k\left(\bmod 2\right)$. לכן הגענו לסתירה.

כעת נניח בשלילה ש- $s_{4k+3}<0$ ונעשה את אותו הטיעון רק שבמקום $x_{4k+1}=(-1)^k x_k$ נשתמש בנוסחה $x_{4k+3}=x_k$ ונגיע לסתירה בדיוק באותה צורה.

6. יהיה k מספר טבעי גדול מ-1. סדרה $a_1,a_2,\ldots$ מוגדרת באופן הבא: $a_1=1$, $a_2=k$ ו- $a_{n+1}-(k+1)a_n+a_{n-1}=0$, מצא את כל הערכים באפשריים של n כך ש- a_n זה חזקה של k.

פתרון. בדיקה של כמה ערכים ראשונים בסדרה מראה כי $a_{n+1}=p_n(k)=k^n+(n-1)k^{n-1}+\ldots$. כך למשל:

$$p_1(k)=k,\quad p_2(k)=k^2+k-1,\quad p_3(k)=k^3+2k^2-k-1,\quad p_4(x)=k^4+3k^3-3k$$

אלה פולינומים מעניינים, וניסיון להבין תכונות שלהם מוביל לפתרון. נחלק את הפתרון לשלבים:

למה 0. כאשר מסתכלים מודולו k מקבלים

$$a_0=1,\ a_1=0,\ a_2=-1,\ a_3=-1,\ a_4=0,\ a_5=1,\ a_6=1,\ldots$$

וזה מחזורים מודולו 6.

למה 1. אם $k+1=s^2+s^{-2}$, אז $p_n(k)=\dfrac{s^{2n+1}+s^{-2n-1}}{s+s^{-1}}$.

לכן נסמן $c_n=\dfrac{s^n+s^{-n}}{s+s^{-1}}$. אזי $a_n=c_{2n+1}$. בנוסף נגדיר $b_n=s^n+s^{-n}$.

למה 2. b_n שלם כאשר n זוגי.

למה 3. מתקיימת הנוסחה: $c_n=c_m b_{n-m}-c_{n-2m}$.

למה 4. המספר c_{nm} מתחלק ב- c_m, כאשר n,m אי-זוגיים.

מכאן אפשר לסיים את הפתרון בקלות. אכן, לפי למה 0 אם $n-1$ לא מתחלק ב-3, אז a_n זר ל- k. במילים אחרות, אם c_n שעבורו n אי-זוגי זר ל- k אלא אם כן $3|n$. כלומר אם ל- n, כאשר n אי-זוגי יש מחלק ראשוני $p\ne 3$, אז c_p זר ל- k. היות והסדרה a_n עולה ומורכבת ממספרים טבעיים, מספר שמתחלק בכזה c_p אינו חזקה של k.

לכן c_n הוא חזקת k כאשר n אי-זוגי, רק אם n הוא חזקת 3. קל לראות כי $c_3 = a_1 = k$ הוא חזקה של k, וכל מספר גדול יותר מסוג c_{3^r} בהכרח מתחלק ב- c_9. אבל $c_9 = a_4 = k^4 + 3k^3 - 3k$.

נניח c_9 מחלק חזקה של k (זה לא אומר שהוא חזקה של k!). אז לכל ראשוני p שמחלק את $k^3 + 3k^2 - 3$, בהכרח גם p מחלק את k, לכן את $\left(k^3 + 3k^2 - 3, k\right) = \left(3, k\right)$. לכן p הוא 3. מכאן $k^3 + 3k^2 - 3 = 3^u$, מכאן $3 | k$ (הרי $k > 1$ לפי נתון), אבל אז

$$k^3 + 3k^2 - 3 = 27\kappa^3 + 27\kappa - 3$$

וזה מתחלק ב-3 אך לא ב-9.

זה משלים את ההוכחה בהינתן הלמות. הקורא יכול להוכיח את הלמות בכוחות עצמו או להמשיך לקרוא.

למה 2. $k^n < p_n\left(k\right)$, כאשר $n \geq 2$, $k > 1$.

הערה. מטענה זו קל להסיק גם כי $p_n\left(k\right) < k^{n-1}\left(k + n - 1\right) < \left(k+1\right)^n$, כאשר $n \geq 2$, $k > 1$, לכן $p_n\left(k\right)$ אינה m^n, אבל זה לא מה שמבקשים.

הוכחת למה 0. הנתון $a_{n+1} - \left(k+1\right)a_n + a_{n-1} = 0$ מודולו k הופך ל- $a_{n+1} - a_n + a_{n-1} = 0$ ומכאן כל לחשב.

הוכחת למה 1. סדרת הפולינומים מוגדרת בעצם באמצעות נוסחת נסיגה:

$$p_{n+1}\left(x\right) = \left(x+1\right) p_n\left(x\right) - p_{n-1}\left(x\right)$$

עם תנאי התחלה $p_0\left(x\right) = 1$, $p_1\left(x\right) = x$. היה אפשר להתחיל צעד אחד קודם: $p_{-1}\left(x\right) = 1$ ואז היינו מקבלים p_1 כמו שצריך באמצעות נוסחת הנסיגה.

נרצה להראות את הנוסחה המפורשת $p_n\left(x\right) = \dfrac{t^{2n+1} + t^{-2n-1}}{s + s^{-1}}$ כאשר $x + 1 = s^2 + s^{-2}$. עבור $n = 0, -1$ הנוסחה ברורה. מכאן

$$\left(s^2 + s^{-2}\right) p_n = \frac{\left(s^2 + s^{-2}\right)\left(s^{2n+1} + s^{-2n-1}\right)}{s + s^{-1}} = \frac{s^{2n+3} + s^{-2n-3}}{s + s^{-1}} + \frac{s^{2n-1} + s^{-2n+1}}{s + s^{-1}} = p_{n+1} + p_{n-1}$$

כלומר הנוסחה המפורשת מקיימת את נוסחת הנסיגה, לכן הטענה נכונה באינדוקציה.

הוכחת למה 2. נוכיח באינדוקציה כי $b_{2n}=s^{2n}+s^{-2n}$ שלם, כאשר כבר נתון כי s^2+s^{-2} שלם.
ניקח $\left(s^2+s^{-2}\right)^n$, ונפתח סוגריים. נקבל מספר שלם. במספר זה מופיעה מחובר b_{2n}, ומחוברים נוספים $\alpha_m b_{2m}$, כאשר α_m שלם כי הוא התקבל כסכום, ו-b_{2m} שלם לפי הנחת האינדוקציה. כלומר אם מוסיפים ל-b_{2n} מספרים שלמים מקבלים מספר שלם, ולכן גם הוא שלם.

הוכחת למה 3. צריך להוכיח נוסחה: $c_n=c_m b_{n-m}-c_{n-2m}$.

נזכיר את ההגדרות: $c_n=\dfrac{s^n+s^{-n}}{s+s^{-1}}$, $b_n=s^n+s^{-n}$. כלומר צריך לבדוק כי

$$\frac{s^n+s^{-n}}{s+s^{-1}}+\frac{s^{n-2m}+s^{2m-n}}{s+s^{-1}}=\frac{s^m+s^{-m}}{s+s^{-1}}\left(s^{n-m}+s^{m-n}\right)$$

$$s^n+s^{-n}+s^{n-2m}+s^{2m-n}=\left(s^m+s^{-m}\right)\left(s^{n-m}+s^{m-n}\right)$$

ולאחר פתיחת סוגריים הכול מתקבל.

הוכחת למה 4. המספר c_{nm} מתחלק ב-c_m, כאשר n,m אי-זוגיים. נוכיח באינדוקציה ש-$c_m \mid c_{m(2k-1)}$, נניח שהוכחנו עבור k, ונשתמש בלמה 3:

$$c_{(2k+1)m}=c_m b_{2km}-c_{(2k-1)m}$$

נשתמש בטענה עבור $2k+1=n$ ונסיים.